

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

L'ÉCONOMIE CALCULABLE : FONDEMENTS ALGORITHMIQUES POUR
L'ÉCONOMIE MATHÉMATIQUE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN PHILOSOPHIE

PAR
VINCENT MOTARD-CÔTÉ

AOÛT 2014

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	v
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I.....	11
LA RATIONALITÉ ÉCONOMIQUE.....	11
1 – Modéliser l'agent rationnel.....	12
1.1 – Un premier modèle récursif : la machine de Turing	12
1.2 – Un deuxième modèle récursif : l'automate fini.....	17
1.3 – La rationalité de l'agent rationnel.....	19
2 – L'impossibilité du choix rationnel.....	20
2.1 – une preuve directe	20
2.2 – une preuve indirecte.	23
3 – Modèles récursifs	24
3.1 – Espace Métrique Récursif	24
3.2 – Fonction récursive de choix rationnel	25
4 – Conclusion : Représentation et Réalisation	26
CHAPITRE II	27
L'ANALYSE RÉCURSIVE DE LA THÉORIE DES JEUX	27
1 – von Neumann-Morgenstern : mathématiser l'interaction sociale.....	28
1.1 – Une nouvelle perspective : impasse de la maximisation.....	29
1.2 – Trois concepts clés : solution, domination et stratégie	33
2 – John Nash : des résultats généraux.	41
3 – Rabin : Une stratégie impossible.	45
3.1 – Win-Lose games, les jeux de Gale-Stewart	46

3.2 – Jeux effectifs	48
3.3 – Le jeu de Rabin	51
4 – Y a-t-il des jeux possibles? Décidabilité et complexité :	54
5 – Conclusion : l'axiomatique racine du problème?	62
CHAPITRE III	65
LA RATIONALITÉ LIMITÉE, UNE RATIONALITÉ CALCULABLE?	65
1 – L'économie comportementale classique : l'héritage de Herbert Simon.	67
1.1 – Une rationalité raisonnée.	67
1.2 – Les motivations d'une révolution.....	71
1.3 – Composantes de la rationalité limitée : apprentissage, satisfaction, adaptation.....	74
2 – Formaliser l'adaptation : le volet positif de l'économie calculable.	81
2.1 – La rationalité limitée un concept général.	82
2.2 – Formaliser le concept d'apprentissage.	86
2.3 – L'adaptation le propre des systèmes universaux.....	90
3 – Conclusion	92
CONCLUSION GÉNÉRALE.....	95
BIBLIOGRAPHIE.....	98

REMERCIEMENTS

La rédaction de ce mémoire de maîtrise s'est étirée trop longtemps. À travers ces sept années, plusieurs personnes m'ont apporté un support essentiel. J'aimerais les remercier ici. Je tiens à commencer par Mathieu Marion, mon directeur de recherche. Il y a sept ans, Mathieu a accepté de diriger un transfuge des mathématiques et depuis ce temps, il m'a enseigné et dirigé avec bon cœur et patience. Plus d'une fois, en panique, je l'ai rencontré en ayant peu d'espoir de pouvoir terminer ce travail. À chacune de ces occasions, sans vraiment le savoir, il m'a rassuré et m'a remis sur les rails. Merci Mathieu. Je tiens à remercier mes parents, Joane et Gilles, parce qu'ils ont toujours cultivé chez leurs enfants, l'importance de la connaissance, de la science et de la curiosité. Ils m'ont encouragé à poursuivre des études universitaires et ont rendu celles-ci possibles par leur immense soutien moral et aussi financier, ce qui est, malheureusement, de plus en plus nécessaire au Québec. Je voudrais remercier Alain Voizard, Mauro Rossi et Christian Frenette, qui ont lu et commenté des sections inachevées de ce mémoire. J'ai profité de leurs commentaires et j'espère leur avoir rendu justice. Finalement, je veux dire merci à Albanie Leduc, qui a partagé ces longues années avec moi. Albanie tu es celle qui m'a accompagné de près dans ces années, qui a partagé avec moi les épreuves et les réussites, qui a subi mon stress et enduré mes humeurs, merci, merci, merci! Cette maîtrise a été facilitée par une bourse d'études supérieures du Canada Joseph-Armand-Bombardier du CRSH, par une bourse de maîtrise en recherche du FQRSC, et par une bourse du département de philosophie. J'aimerais souligner que si j'ai pu, venant des mathématiques, palier les lacunes dans mes connaissances de base en philosophie et obtenir les excellents résultats que j'ai obtenus dans ma scolarité de maîtrise, c'est parce que ces bourses de recherche me permettaient de me consacrer à temps plein à mon travail d'étudiant. Il est affligeant de voir que les subventions fédérales à la recherche sont de plus en plus ténues et cela n'annonce rien de bon pour la relève académique. La fin de la rédaction a été rendue possible grâce à un congé de perfectionnement octroyé par mon employeur, le Cégep régional de Lanaudière à Joliette.

RÉSUMÉ

L'économie calculable propose une reformulation de l'économie mathématique à partir des mathématiques constructives et récursives. Ce travail de recherche a pour objectif d'analyser les principaux résultats de l'économie calculable. Dans le premier chapitre, deux preuves de l'impossibilité théorique du choix rationnel sont exposées et discutées. Dans le deuxième chapitre, les principaux concepts de la théorie des jeux sont formalisés récursivement. Il est ensuite démontré que pour plusieurs jeux importants pour l'économie théorique, l'existence d'une stratégie gagnante n'est pas liée à la possibilité théorique de gagner systématiquement. De ce résultat découle un constat sur le rôle épistémologique de la formalisation mathématique. Dans le troisième chapitre, la théorie économique d'Herbert Simon est présentée dans le but de fournir une base théorique au développement de l'économie calculable. Les concepts de cette théorie sont formalisés dans le langage de l'économie calculable : la rationalité limitée, l'apprentissage et l'adaptation sont analysés dans ce contexte. Si l'économie calculable fournit un cadre efficace et, jusqu'à un certain point, *naturel* pour développer les idées de Simon, les préoccupations empiriques de la théorie originale ne sont peut-être pas assez présentes dans le programme de l'économie calculable. Si l'économie calculable veut s'imposer comme théorie économique mathématisée, elle devra adhérer plus étroitement au programme empiriste d'Herbert Simon et développer des résultats positifs qui convaincront la communauté des économistes à changer d'outils mathématiques.

Mots clés : fondements de l'économie, récursion, rationalité, théorie des jeux, algorithme, Kumaraswamy Vela Velupillai, Herbert Simon.

INTRODUCTION

L'économie contemporaine bénéficie d'un statut particulier parmi les sciences sociales. En effet, dans son développement, l'économie a réussi à produire une théorie mathématique très forte. Cette théorie mathématique lui permet de modéliser les phénomènes auxquels elle s'intéresse dans une approche similaire aux sciences naturelles. Cette orientation formelle dans la recherche en économie fait face à de nombreuses critiques qui proviennent de plusieurs disciplines. Les philosophes, les sociologues, les psychologues et même certains économistes ne sont pas avares de reproches. On pourrait classer la plupart de ces critiques dans deux catégories : la première rassemble les critiques qui visent les postulats de la théorie économique, la seconde rassemble les critiques qui s'attaquent aux résultats de la théorie. Les objections qui visent les postulats de base de l'économie néoclassique contestent la validité de sa définition de la rationalité des agents économiques. Selon ces critiques, les hypothèses des économistes sont irréalistes parce qu'elles ne correspondent pas aux capacités de l'être humain. À partir de ce rejet des axiomes formant la définition de la rationalité, le rejet de la théorie mathématique, qui est constituée des conséquences déductives de ces axiomes, est trivial. Les critiques qui visent les résultats de la théorie constatent, quant à elles, que les conditions de l'activité économique réelle sont, le plus souvent, incompatibles avec les théorèmes de l'économie mathématique. Pour ces dernières critiques, le décalage dramatique qui existe entre les prédictions de la théorie et le comportement empirique des systèmes économiques est un symptôme du caractère inadéquat de la théorie. Sur cette base, certains rejettent en bloc la mathématisation de l'économie; d'autres, à l'opposé, limitent l'économie à une forme de mathématiques appliquées et rejettent la pertinence de son discours sur la société. Dans les deux cas, la théorie mathématique elle-même n'est pas remise en question.

Bien que ces deux types de critiques soient légitimes et qu'elles nous renseignent souvent de manière précise sur des problèmes épistémologiques importants auxquels l'économie théorique doit faire face, ce qui m'intéresse plus particulièrement est un troisième type de critiques qui a pour cible les méthodes mathématiques utilisées par les économistes. Ici, à l'inverse des critiques traditionnelles, il faut poser des questions épistémologiques quant à la légitimité des méthodes mathématiques d'abord et déduire, à partir des réponses apportées à ces questions, certaines conséquences sur les axiomes légitimes et les résultats possibles de l'économie mathématique. Le programme de recherche initié par Kumaraswamy Vela Velupillai, qu'il a baptisé l'économie calculable (computable economics), se donne cet objectif. Le point de départ est l'inspection scrupuleuse des techniques mathématiques nécessaires à l'élaboration des théories néoclassiques de micro et macroéconomie. Sur la base de critères élaborés par la philosophie des mathématiques et l'informatique théorique, on recherche systématiquement l'usage de certaines méthodes qui devraient être proscrites des pratiques de l'économiste mathématicien.

Pour comprendre les avantages de cette stratégie par rapport aux critiques plus traditionnelles, il est utile d'essayer de caractériser certains principes épistémologiques de la théorie économique mathématisée. Le terme *économie néoclassique* peut être associé à un vaste éventail de théories, de méthodes et de résultats en économie. D'un point de vue microéconomique, cette théorie caractérise l'agent économique par : des préférences complètes et transitives, une information complète sur l'état de l'économie et un comportement qui maximise l'utilité. D'un point de vue macroéconomique, l'équilibre général est garanti d'une part par la rationalité des consommateurs et d'autre part par la nature des commodités, qui sont « complètement spécifié[es] physiquement, temporellement et spatialement »¹ par un nombre réel quelconque dans un espace topologique \mathbb{R}^I .

Parmi les discours scientifiques, l'économie néoclassique a une particularité essentielle, elle explique le comportement des agents économiques par une maximisation d'une unique variable, l'utilité. Rosenberg² utilise le terme de théorie extrémale³ pour

¹ Debreu, *Théorie de la valeur*. 1984, p. 35.

² Rosenberg, *Economics - Mathematical Politics or Science of Diminishing Returns?* . 1992

identifier le recours à cette stratégie. Une théorie extrémale est une théorie qui explique tous les phénomènes à sa portée par l'optimisation d'une seule variable quantifiable. L'économie n'est pas la seule à adopter cette stratégie de l'optimisation, elle est même en très bonne compagnie. Par exemple, la physique newtonienne et la théorie de l'évolution sont aussi des théories extrémales.

Trois caractéristiques rendent les théories extrémales très efficaces et sont dignes de mention. En effet, elles permettent de comprendre pourquoi les économistes ont intérêt à défendre la forme actuelle de leurs théories. Premièrement, la mécanique explicative de ces théories est uniforme sur leur domaine respectif, comme tous les systèmes décrits par la physique newtonienne minimisent l'énergie potentielle, comme l'environnement maximise toujours la fitness, tous les systèmes économiques maximisent l'utilité ou tendent vers un état d'équilibre stable⁴. Cette mécanique rend les théories extrémales très parcimonieuses. Deuxièmement, cette stratégie permet l'utilisation d'outils mathématiques puissants comme le calcul différentiel. Finalement, la stratégie extrémale fournit une protection admirable contre la falsification. Évidemment, aucune théorie ne peut être strictement falsifiée puisqu'il est toujours possible de modifier certaines hypothèses auxiliaires. Par contre, même le genre de contre-exemple qui normalement pourrait falsifier une théorie scientifique n'a pas d'impact sur les théories extrémales. Les théories extrémales expliquent tous les phénomènes dans leur domaine par un mécanisme uniforme, elles n'ont donc pas d'hypothèses auxiliaires. Dans ce cas, un contre-exemple ne peut avoir que deux résultats, il est possible de rejeter la théorie en bloc ou de considérer que les conditions initiales n'ont pas été mesurées adéquatement (les mesures ne sont pas assez précises, ou des facteurs significatifs ont été ignorés).

Ainsi, si les économistes refusent d'abandonner la théorie des anticipations rationnelles malgré l'évidente inadéquation avec les observations du comportement des

³ *Extremal theory* est dérivé de *extremal laws* en physique.

⁴ L'équilibre stable est *équivalent* à l'extremum pour un système. Tout comme l'optimisation de l'énergie en physique fait tendre les systèmes thermodynamiques vers un équilibre stable.

agents économiques, c'est parce la stratégie extrémale propre à leur théorie réussit à convaincre que le problème est au niveau de la caractérisation des conditions initiales à l'application des lois économiques. Ce n'est pas une stratégie déraisonnable, puisqu'elle a été adoptée par de nombreuses théories scientifiques, comme la mécanique classique et la théorie de l'évolution. Par contre, ces dernières ont une histoire qui témoigne d'un succès prédictif et d'un progrès explicatif dont l'économie peut difficilement se targuer.

La forme de l'économie, résumée par la stratégie extrémale qui est le point de départ de son explication et par les modèles mathématiques logiquement cohérents dans lesquelles elle est exprimée, l'isole donc en principe et en pratique d'une falsification empirique. De plus le modèle mathématique qui est la pierre d'assise de la théorie et qui doit permettre de synthétiser les lois liées à l'optimisation de la variable utilité, est maintenant vu comme une définition de la rationalité. Ainsi, le modèle ne peut servir qu'à vérifier si une action particulière est rationnelle ou pas. Si la critique de l'économie calculable se distingue dans ce contexte, c'est qu'elle ne s'intéresse qu'indirectement aux hypothèses et aux résultats de l'économie théorique. Son objet d'intérêt principal est la théorie mathématique elle-même dans laquelle sont formulés ses hypothèses et ses résultats.

L'économie calculable, bien qu'étant un programme de recherche assez jeune, une vingtaine d'années à peine, s'appuie sur des préoccupations qui traversent la réflexion de certains mathématiciens et de certains économistes depuis près d'un siècle maintenant et qui ont comme origine les travaux sur la récursivité et la calculabilité par des mathématiciens tels que Turing, Church, Kleene, Gödel, Herbrand, Hilbert et Post. L'avantage principal, de porter la critique face à l'économie classique directement au niveau des méthodes mathématiques, réside dans la force de conviction des arguments techniques auprès des économistes actuels. Lorsqu'ils sont confrontés à une critique philosophique sur la nature de la rationalité ou à une critique sociologique sur l'inadéquation de leurs modèles et de la société, les économistes réagissent souvent en mettant de l'avant le caractère formel de leur discipline. Ce faisant, ils

justifient le manque de réalisme au profit d'une plus grande rigueur mathématique et d'une plus grande cohérence interne. Par contre, face à une critique de ce même formalisme et face à une démonstration tout aussi formelle de son impuissance, les économistes devront trouver d'autres arguments pour justifier leurs pratiques. De plus, l'analyse critique des méthodes et le développement d'une économie mathématique plus appropriée aux objets économiques peuvent se révéler être un outil puissant pour fonder une nouvelle science économique répondant mieux aux critiques philosophiques et sociologiques. Cette nouvelle science, en révisant les mathématiques de l'économie, permettra de poser certaines questions occultées par la tradition orthodoxe, qui ont généralement comme objet la légitimité des résultats positifs de l'économie néoclassique.

Le projet de l'économie calculable est de donner corps à l'intuition selon laquelle l'utilisation de mathématiques non algorithmiques ou ayant comme domaine les nombres réels ne permet pas un traitement adéquat des phénomènes économiques. Une fois le contenu formel de cette intuition explicité s'amorce un travail visant à analyser l'impact de l'utilisation de méthodes propres aux mathématiques constructives et à la théorie de la calculabilité (computability theory). Cet impact se fait sentir sur les hypothèses et sur les résultats de l'économie théorique.

L'utilisation de méthodes constructives ou algorithmiques n'est pas nouvelle, même en économie. Ce qui est proprement innovateur dans l'approche de Velupillai, c'est de définir un cadre méthodologique où ces théories non classiques sont utilisées de manière *systématique*. Si certains économistes font un usage partiel de méthodes constructives et de méthodes classiques⁵, ceux qui souscrivent aux principes de l'économie calculable s'obligent à fonder toute l'économie théorique sur des mathématiques soumises à de fortes contraintes, tout en soutenant que ces contraintes sont *naturelles* dans le domaine d'intérêt des

⁵ C'est un reproche que Velupillai fait à l'approche CGE (computable general equilibrium), qui permet l'utilisation de disjonctions indécidables dans la construction de ses algorithmes.

économistes. L'objectif de Velupillai est de poser les bases d'une théorie économique qui sera enfin appropriée à la nature des systèmes économiques contemporains⁶. Ce faisant, il révisé la définition classique de l'agent rationnel et démontre que plusieurs des résultats les plus chers à l'économie néoclassique sont faux.

L'élaboration de l'économie calculable à travers le vingtième siècle n'a pas suivi de plan linéaire. Les résultats importants de cette nouvelle approche ont souvent été produits dans le cadre de recherches isolées et espacées dans le temps. Le projet de Kumaraswamy Velupillai est de formuler de manière précise un cadre méthodologique pour l'économie calculable en rassemblant ces résultats partiels et en les unissant par l'identification des techniques mathématiques et des préoccupations d'ordre ontologiques ou épistémologiques qu'ils ont en commun. Le premier résultat relevé par Velupillai comme appartenant en propre à l'économie calculable est un résultat de Rabin qui va comme suit: *"There are games in which the player who in theory can always win cannot do so in practice because it is impossible to supply him with effective instructions regarding how he should play in order to win"*⁷. Dans cet exemple, on retrouve ce qui est au coeur de l'entreprise : les objets traités par l'économiste et les méthodes qu'il utilise doivent être effectivement réalisables. C'est cette conviction qui sera le point de départ et le principal critère de la sélection imposée sur les méthodes mathématiques disponibles à l'économiste.

Lorsque l'on parle de procédure effective, on caractérise un ensemble intuitif de propriétés : être formulé dans un nombre fini d'étapes de longueur finie; produire un résultat en un nombre fini d'étapes et dans un temps fini; et être réalisable par un exécutant qui n'est pas créatif c'est-à-dire que rien n'échappe dans l'exécution à la série d'instructions données. En gros, ce qui est effectivement réalisable peut être obtenu comme résultat d'un algorithme.

⁶ En 2000, il veut seulement proposer une alternative et ne prétend pas qu'il y ait un formalisme qui soit plus naturel qu'un autre pour l'économie. Cependant, en 2005, il a radicalisé sa position sur ce sujet et voit la théorie de la calculabilité comme seule branche de la logique mathématique appropriée pour construire une théorie économique empiriquement adéquate.

⁷ Rabin, *Effective Computability of Winning Strategies*. 1957, p. 148.

Même si l'idée d'une procédure effective ou d'une fonction effectivement calculable semble claire, il n'y a pas de définitions formelles de ces concepts. Pour les rendre opérants, on doit avoir recours à la thèse de Church qui pose l'optimalité de différents formalismes mathématiques, démonstrativement équivalents, pour caractériser la notion d'effectivité⁸. Ces formalismes (les fonctions récursives, les machines de Turing, le λ -calcul et les systèmes de Post) doivent donc être les fondements logiques de l'approche calculable en économie.

Les formalismes adéquats pour traiter des questions relatives à l'effectivité sont tous apparus dans les années 1930. À cette époque, la mathématisation de l'économie avait déjà débuté sur des fondements mathématiques classiques et la popularité des *formalismes récursifs* n'a pas su rivaliser avec celle de la théorie des ensembles ou de la théorie des modèles. De ce fait, le développement du questionnement économique a été infléchi vers des problèmes résolubles par les méthodes classiques. L'économie mathématique a progressivement fait passer les problèmes économiques d'un langage où leur connexion aux intuitions était apparente à un langage où cette connexion n'existe plus. Pour le mathématicien classique, habitué à travailler avec les outils de l'analyse réelle, cette tradition est tout à fait correcte puisqu'elle préserve les aspects jugés importants du problème : des contraintes sur la forme des fonctions de choix ou sur l'espace de prix qui garantissent une solution unique au problème d'optimisation. Par contre, lorsqu'on regarde cette traduction du point de vue de la calculabilité, on remarque que la formulation mathématique (topologique) empêche de poser des questions quant à la décidabilité des problèmes ou à la possibilité de fournir des procédures effectives permettant de produire une solution conservant une signification économique. Ainsi, la traduction dans un langage mathématique permettant de trouver une solution générale enlève par le fait même sa signification économique à la solution trouvée.

⁸ Ces formalismes sont optimaux dans la mesure où il n'existe pas de fonction connue, qu'on voudrait qualifier de fonction effectivement calculable et qui n'appartient pas à l'ensemble des fonctions définies par l'un ou l'autre de ces formalismes.

Ainsi, la reformulation récursive de l'économie mathématique permettra, selon Velupillai, de poser directement les questions masquées par le formalisme classique quant à la faisabilité de ses conclusions. Par exemple, si l'approche classique fournit une solution au problème de l'équilibre général, cette solution comporte deux désavantages majeurs d'un point de vue récursif: la solution fournie se trouve dans l'ensemble des nombres réels et aucun procédé permettant d'arriver à la solution n'est spécifié. Pour l'économie calculable: « *Rational or integer constraints on data and solutions are explicitly introduced ab initio and the solution brings with it an algorithm, a process, to achieve it*⁹. » Par ailleurs, la reformulation rendra aussi possible la réalisation du fait que pour une grande classe de problèmes économiques intéressants, il ne peut y avoir de méthodes permettant de décider si un algorithme *optimal* existe.

Plusieurs résultats ou programmes de recherche que l'on peut classer sous l'étiquette de la calculabilité sont apparus en économie. En jetant un coup d'œil rétrospectif sur les recherches menées en économie dans la deuxième moitié du vingtième siècle, Velupillai identifie celles qui tombent directement sous la définition de son programme de recherche: « [...] *seek or investigate the economic implications of recursion-theoretic restrictions to the standard primitive concepts of economic analysis*¹⁰. » Ce programme a bien été adopté, implicitement, par quelques chercheurs selon diverses stratégies. Une première famille de travaux que l'on pourrait qualifier d'économie calculable avant la lettre utilise des outils formels provenant de la théorie de la récursion avec l'intention de poser des questions propres au cadre récursif. Certains chercheurs ont voulu traduire directement la théorie classique dans un formalisme récursif. Ces efforts se sont toujours restreints à un domaine particulier de la théorie, mais ils couvrent tout de même un large éventail: la théorie des jeux, la définition de la rationalité, l'apprentissage, la théorie des équilibres et la théorie des anticipations rationnelles. Les premiers travaux de ce type remontent à Rabin en théorie des jeux. Par

⁹ Velupillai, *Computable Economics The Arne Ryde Memorial Lectures*. 2000, p. 15.

¹⁰ Ibid., p. 14.

contre, de 1957 jusqu'à 1990, seule une poignée de chercheurs ont entrepris de réinterpréter l'économie sur des bases récursives. Velupillai suggère qu'une cause de ce phénomène peut se voir dans la nature négative de tous les résultats obtenus dans cette direction. D'après lui, l'économie calculable doit reprendre ses résultats négatifs et montrer comment en tirer des conséquences positives. Une version plus appliquée de ce genre de travaux porte sur l'analyse de la complexité computationnelle des opérateurs et procédés de l'économie classique. La faisabilité en pratique, plutôt qu'en principe, des calculs impliqués dans la recherche de solutions aux problèmes économiques est ici à l'honneur. Ces questions couvrent une grande diversité de contributions : des préoccupations de l'École autrichienne face au calcul économique socialiste jusqu'aux préoccupations d'Herbert Simon sur la complexité computationnelle de la rationalité économique.

La stratégie principale de *l'économie calculable* est de démontrer qu'une classe donnée de problèmes n'est pas décidable. C'est ce que permet de faire le formalisme récursif. Cependant, même si une classe de problèmes n'est pas décidable, cela ne nous renseigne pas sur la solution d'un problème particulier¹¹. Probablement que de caractériser les sous-classes de problèmes décidables pourrait amener des informations intéressantes sur le genre de restrictions qui, lorsqu'imposées aux systèmes économiques, les rendent complètement compréhensibles. Ce genre de discussion n'est pas encore présent dans le programme de l'économie calculable.

L'objectif de ce travail de recherche est de présenter et d'analyser les résultats de l'économie calculable. Le premier volet de cette analyse sera consacré à la rationalité de l'agent économique. Dans le premier chapitre, la rationalité économique classique sera représentée à l'aide des outils de l'économie calculable. Cette représentation permettra de

¹¹ On ne sait pas s'il y a une solution générale à la conjecture de Goldbach, mais on a pu la vérifier pour chaque cas particulier jusqu'à présent. Aussi, on sait que le problème général d'une solution à une équation diophantienne n'est pas décidable, mais certains sous-problèmes le sont. Par exemple, le sous-problème pour les équations de la forme $ax + by = c$.

vérifier si le comportement prescrit par l'économie classique est réalisable par *l'agent de l'économie calculable*. Ce faisant, des bornes sur la complexité computationnelle de la tâche qui correspond au choix rationnel seront proposées. Le second volet de l'analyse portera sur la rationalité de l'agent en situation d'interaction stratégique, c'est-à-dire sur la théorie des jeux. Une fois encore les hypothèses de l'économie classique seront conservées, mais reformulées dans le langage de l'économie calculable. Les principaux résultats, comme au premier chapitre, sont de nature négative. Le comportement prescrit par la théorie classique n'est plus atteignable si l'on peut formaliser la complexité de la tâche qui lui est reliée. Finalement, le dernier chapitre vise à vérifier les possibilités de fonder une théorie économique positive à partir des postulats de l'économie calculable. Les idées d'Herbert Simon, qui forment une théorie économique alternative et *naturellement* compatible avec les inquiétudes de l'économie calculable, seront décortiquées. Le travail de formaliser ces idées algorithmiquement sera lui aussi exploré, et les possibles résultats positifs qui peuvent sortir de ce travail seront sous-pesés.

CHAPITRE I

LA RATIONALITÉ ÉCONOMIQUE

Devant le constat d'insatisfaction que l'on peut faire envers une certaine forme d'économie, caractérisée par la modélisation des agents économiques à l'aide des postulats de rationalité incarnés dans les axiomes de la théorie du consommateur et de la théorie de la firme, plusieurs réactions sont possibles. Une première famille de réactions voit dans les nombreux problèmes de l'approche classique, la motivation d'abandonner l'usage des mathématiques en économie. Par contre, on peut souhaiter conserver l'outil mathématique qui peut se révéler très utile, mais questionner d'abord les limites de son application aux problèmes économiques. Ces limites peuvent survenir dans les méthodes mathématiques à utiliser, dans le type de problème à attaquer, ou encore dans le type d'entités représentables. Ce chapitre a pour objectif de présenter une voie par laquelle des limites formelles sont caractérisées à la fois pour les méthodes, les agents et les entités légitimes de l'économie mathématique. L'origine de cette approche doit selon moi se trouver dans un départ de la notion de maximisation vers celle de la résolution de problème. Ce changement de paradigme invitera un passage de l'usage des mathématiques classiques (calcul différentiel, systèmes dynamiques (équations différentielles), topologie...) à celui de mathématiques récurives (algorithmes, machines de Turing, équations diophantiennes, programmation linéaire en nombres entiers...). Ces outils récurifs amèneront une caractérisation naturelle de l'agent économique en tant que résolveur de problème. Des problèmes économiques nouveaux (pour l'agent économique *et* pour le chercheur en science économique) devront donc être abordés alors qu'ils étaient auparavant inexprimables : la décidabilité des problèmes classiques, la

faisabilité des algorithmes modélisant les solutions classiques, la complexité des algorithmes théoriquement faisables.

Mon intention est de vérifier si cette nouvelle économie mathématique, en adoptant des contraintes semblables à celles adoptées par d'autres théories voulant comprendre plus justement le comportement des agents économiques réels, c'est-à-dire en embrassant un modèle de l'agent résolveur de problème, réussira à caractériser les intuitions et les résultats de ces autres théories par des énoncés formels. Les préoccupations des théories de l'agent résolveur formelles et non formelles, sont-elles les mêmes? Arrivent-elles à des conclusions similaires? La formalisation peut-elle contribuer de manière essentielle au débat ou est-elle superflue?

1 – Modéliser l'agent rationnel

La nature de l'agent économique est au cœur de la microéconomie, en effet le comportement du consommateur et du producteur concret devrait pouvoir être compris sur la base de la description de l'agent économique. Sa modélisation mathématique permet de développer une théorie de l'action économique basée sur des résultats formels. Pourtant, le système formel choisi peut influencer grandement ces résultats et donc la théorie microéconomique. Dans un premier temps, l'agent économique rationnel de la microéconomie orthodoxe sera modélisé à l'aide d'outils propres à la théorie de la récursion. Dans un second temps, les caractéristiques de l'agent économique qui échappent à la formalisation de l'agent rationnel seront explorées.

1.1 – Un premier modèle récursif : la machine de Turing

Puisqu'historiquement les problèmes de la théorie économique ont été abordés à l'aide des mathématiques classiques, les objets économiques sont compris en des termes qui ne sont pas essentiellement récursifs ou constructifs. Les fonctions réelles représentant la

demande ou l'offre sont des exemples d'objets économiques modélisés dans une mathématique non récursive. Pour comprendre l'effet de la substitution des modèles récursifs aux modèles classiques, la première étape dans le développement d'une théorie économique récursive, a été d'analyser les concepts de la théorie économique orthodoxe reformulée dans le langage de la théorie de la récursion. En procédant de la sorte, il est possible de comparer les résultats formels d'un même ensemble de prémisses et de discuter des divergences qui existent entre ce que permettent les deux formalismes.

Une caractéristique fondamentale de l'agent économique rationnel est son comportement de choix. La structure imposée sur l'ensemble de préférences et sur la fonction d'utilité de l'agent économique doit l'amener à choisir rationnellement, c'est-à-dire à choisir une alternative qui *maximise* son utilité. Les grandes avancées de l'économie théorique de la première moitié du XX^e ont permis de caractériser mathématiquement ces hypothèses et d'offrir une démonstration de la possibilité du comportement rationnel¹². L'économie calculable a consacré beaucoup d'effort à explorer le contenu récursif de cette conception. Est-il possible, en modélisant récursivement l'agent économique, de démontrer la possibilité d'un choix rationnel? L'exercice est donc ici de conserver le plus possible toutes les hypothèses de la théorie classique en utilisant les outils formels de la récursion et de voir si les mêmes conclusions s'imposent. En montrant que l'on peut traduire le comportement de choix d'un agent se conformant à ces hypothèses par celui d'une machine de Turing, on veut montrer que les limites formelles de ce type de calculateur sont *également* les limites des agents rationnels.

Le comportement de choix d'un agent rationnel est traditionnellement représenté par une fonction de choix. Le rôle de cette fonction est de sélectionner à partir d'un ensemble d'alternatives, un sous-ensemble qui est l'objet du choix¹³. Une fonction de choix *rationnelle* a la particularité de sélectionner un sous-ensemble bien caractéristique de l'ensemble

¹² Debreu, *Théorie de la valeur*. 1984, p. 69.

¹³ Velupillai soutient sur la base de la définition d'une fonction de choix, elle sélectionne un sous-ensemble et pas nécessairement une alternative unique, que la machine de Turing équivalente doit être non-déterministe. cf. Velupillai, *Computable Economics The Arne Ryde Memorial Lectures*. 2000, p. 31. Je ne suis pas du tout convaincu par cet argument. En effet, la fonction de choix bien qu'elle soit une fonction ensembliste est vraisemblablement modélisable par une machine déterministe. D'ailleurs si ce n'était pas le cas ce ne serait pas une *fonction* au sens classique.

d'alternatives, l'ensemble des alternatives maximales. Pour ce faire, elle doit être définie à partir d'une relation binaire sur l'ensemble des alternatives, laquelle correspond à un ordre (sur les préférences)¹⁴.

Donc, à partir d'un ensemble χ d'alternatives, une fonction de choix est définie sur une famille de sous-ensembles finis de χ et discrimine certains membres de cet ensemble, formellement :

Étant donné χ un ensemble d'alternatives
et Ω une famille de sous-ensembles finis non vides de χ
(Ω est non vide) alors

$$C: \Omega \rightarrow \Omega$$

$$C(\omega) \subset \omega; \forall \omega \in \Omega$$

Pour comprendre pourquoi l'équivalence entre le comportement de choix d'un agent économique et le fonctionnement d'une machine de Turing apparaît avec autant de force à un auteur comme Velupillai, il faut comprendre sa conception d'une fonction mathématique. Historiquement, le concept de fonction a été associé à une règle ou une procédure d'un type particulier (expression analytique) permettant de déterminer à partir de la valeur d'une variable indépendante la valeur d'une variable dépendante. Une nouvelle définition du concept de fonction qui s'est établie au XIX^e siècle, et qui s'est imposée au XX^e, s'est progressivement détachée de cette nature opérationnelle¹⁵. Aujourd'hui, la notion de fonction est le plus souvent définie de manière ensembliste, ainsi :

une fonction F est un sous-ensemble du produit cartésien¹⁶ $X \times Y$ tel que si (x, y) appartient à F et que (x, y') appartient aussi à F alors $y = y'$

¹⁴ cf. Arrow, «Rational Choice Functions and Orderings». 1959. pour l'équivalence entre une fonction de choix rationnelle et un ordre sur les préférences.

¹⁵ cf. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*. 1990, p. 612.

¹⁶ Le produit cartésien de deux ensembles est l'ensemble des paires ordonnées d'éléments tirés de chaque ensemble : $A \times B = \{(a, b) \text{ t.q. } a \in A \text{ et } b \in B\}$. Cette définition s'étend facilement au produit cartésien d'un nombre arbitraire d'ensembles.

Cette définition, qui associe la fonction à son graphe, fait disparaître la procédure qui permet d'obtenir y à partir de x . Pour Velupillai et pour l'approche récursive en générale, le concept de fonction qui est pertinent est fondamentalement lié à l'exécution d'une tâche, à la description d'une procédure. Les résultats fondamentaux de la théorie de la récursion sont apparus précisément pour essayer de caractériser une classe de fonctions qui sont celles qui peuvent être associées à une procédure *mécaniquement réalisable*, ou, pour être plus exact, algorithmique. Alors que la théorie de la récursion parle des fonctions calculables comme d'un sous-ensemble des fonctions, Velupillai va plus loin : «[...] *the computable economist can try to abandon the starting point of using classical mathematics as a benchmark from which to define computability. (...) the computable economist's starting point should be that all functions are computable*¹⁷.» Si l'on se place dans cette interprétation restreinte de la théorie de la récursion et que l'on accepte que toutes les fonctions *pertinentes* sont calculables, on est poussé à la conclusion que les fonctions de choix doivent être calculables¹⁸. Avec un peu d'audace, il serait possible ici d'invoquer la thèse de Church et de soutenir que ces fonctions calculables sont équivalentes à des machines de Turing pour explorer tout de suite les conséquences de cette équivalence. Velupillai tient par contre à appuyer cette équivalence à l'aide d'une construction plus explicite, qui établira de manière plus convaincante l'équivalence recherchée.

La première étape dans cette construction est le rappel d'un résultat d'Arrow, qui stipule que les fonctions de choix définies à partir d'un ordre — les choix rationnels — sont construites à l'aide d'une séquence de choix sur des ensembles à deux éléments, elles peuvent donc être représentées par une relation binaire sur les éléments de ω . Dans une optique analogue à l'hypothèse des préférences révélées, il sera donc demandé à l'agent de construire un ordre à partir d'une séquence de choix binaires. Donc, le problème peut se ramener à la possibilité de construire une machine de Turing qui va générer l'ordre sur les préférences (la relation binaire) à la base de la fonction de choix rationnel.

¹⁷ Velupillai, *Essays on computable economics, methodology and the philosophy of science*. 2003, p. 56.

¹⁸ Évidemment, il est possible *a priori* qu'elle ne soit pas calculable. Dans ce cas, dans un cadre récursif, elles devront être abandonnées en tant qu'outils de modélisation du comportement de l'agent économique.

Deuxièmement, la spécification de l'ensemble des alternatives doit mettre en évidence sa nature dénombrable, en effet comment interpréter un ordre sur un ensemble non dénombrable comme résultats d'une séquence de choix. Pour ce faire, les alternatives doivent être décrites à l'aide de mots finis sur un alphabet fini¹⁹, ce qui garantit que l'ensemble soit dénombrable. De plus, l'ensemble des paires de telles alternatives sera lui aussi dénombrable. Pour permettre à une machine de Turing d'imiter le comportement de l'agent économique, il faut définir, à l'aide des remarques précédentes, un encodage numérique pour chacune des entités à traiter. Premièrement, on doit coder χ par des nombres naturels, ce qui est théoriquement possible parce que les alternatives sont dénombrables. Comme on a un encodage des alternatives en nombres naturels, on peut, de manière standard, coder les ensembles à deux éléments par une bijection $\tau : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ²⁰. À partir des représentations d'ensembles à deux éléments, on peut construire une représentation des éléments de Ω . Avec ces représentations numériques, tous les éléments nécessaires au *choix* peuvent être représentés sur le ruban d'une machine de Turing.

Ce qu'il reste à faire maintenant, c'est ce qui est caractéristique de la rationalité, il faut déterminer les éléments maximaux de Ω . Pour ce faire, une relation binaire R sur χ , considérée comme un sous-ensemble du produit cartésien $\chi \times \chi$, est elle aussi encodée en termes de nombres entiers, et on peut utiliser une machine de Turing pour tester cette relation. Par exemple, pour tester si (x, y) appartient à R , on caractérisera par une propriété des nombres entiers l'appartenance à R et on utilisera une machine de Turing pour vérifier que $\tau(x, y)$ possède cette caractéristique. En définissant l'ensemble des alternatives maximales, on arrive à l'équivalence recherchée entre une fonction de choix rationnelle qui à tout ω de Ω , associe un sous-ensemble $C(\omega)$ qui est constitué d'éléments maximaux de χ et le

¹⁹ Velupillai, *Computable Economics The Arne Ryde Memorial Lectures*. 2000, p. 33, écrit : *The set of such statements from a finite alphabet can, at most be countable*. À moins que *statement* implique séquence finie, il a clairement tort.

²⁰ Par exemple $\tau(x, y) = \frac{x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y}{2}$ et $\tau(x, y) = \frac{x^2 + 2xy + y^2 + 3y + x}{2}$ sont les deux seuls polynômes du second degré à établir une telle bijection. Par contre, on peut trouver d'autres fonctions adéquates comme $\tau(x, y) = 2^x \times (2y + 1) - 1$

fonctionnement d'une machine de Turing qui établit cette même relation²¹. Toutes les étapes du choix rationnel sont donc *représentées* par le fonctionnement d'une machine de Turing.

1.2 – Un deuxième modèle récursif : l'automate fini.

Avant de discuter des développements théoriques qui sont rendus possibles par un modèle calculable du comportement rationnel, j'aimerais soulever un autre effort qui a été fait pour modéliser à l'aide d'outils récursifs l'agent rationnel. Cette fois, plutôt que d'utiliser la machine de Turing, c'est l'automate fini²² qui modélise l'agent économique, ici encore, le comportement fondamental de cet agent est le choix et la formalisation classique du choix économique par une fonction de choix est prise comme point de départ. La différence fondamentale entre les deux types de calculateur consiste dans la capacité de stockage permise. Alors qu'une machine de Turing dispose d'un ruban infini pour effectuer son calcul, l'automate fini dispose d'un nombre fini d'états. Cette propriété de finitude en fait un outil théorique intéressant pour tenter de comprendre des entités concrètes comme l'ordinateur et le calculateur humain.

Dans l'exemple qui nous intéresse, la particularité de ce nouveau modèle tient à ce que contrairement à la machine de Turing, l'automate n'est pas capable de rendre compte de la rationalité, c'est-à-dire qu'il ne peut représenter ces fonctions particulières que l'on a identifiées comme des fonctions de choix rationnelles et qui sont caractérisées par une relation binaire permettant d'établir des éléments maximaux.

«Suppose we now impose the additional condition, that the decision-making entity must be a finite computing device[...] The question to be investigated is whether this

²¹ Malheureusement, cette présentation de l'équivalence entre agent rationnel et machine de Turing, bien qu'intuitivement convaincante, reste très peu développée techniquement et il me semble clair que le détail d'une équivalence complète – exprimer les fonctions qui représentent numériquement les entités, trouver les propriétés numériques qui « sélectionnent » les éléments maximaux, expliciter la machine de Turing qui effectue les calculs adéquats – représente un défi immense.

²² cf. Kramer, *An Impossibility Result Concerning the Theory of Decision-Making*. 1967

additional condition, in conjunction with the rationality assumptions, leads to a contradiction²³;...»

La *mémoire* finie de ce type de calculateur est rapidement épuisée par la taille de l'ensemble d'alternatives à considérer. Sans entrer dans les détails techniques de la preuve, les éléments clés peuvent être présentés intuitivement. Premièrement, il faut constater que l'alphabet d'entrée étant fini, le nombre de chaînes finies en entrée est infini dénombrable. Il faut aussi constater que le nombre d'états de l'automate fini ne lui permettent pas de différencier chacune de ces chaînes d'entrée et que donc, l'ensemble des chaînes d'entrée peut être muni d'une relation d'équivalence, deux entrées étant équivalentes, si leur traitement par l'automate définit la même séquence de modifications de son état global. La clé du résultat tient à la constatation suivante. Pour que l'automate modélise un comportement rationnel, il doit sélectionner l'alternative optimale. Ainsi, pour l'ensemble $\{a_i \text{ t.q. } i \in \mathbb{N}\}$ d'alternatives, supposons que l'on dispose de chaîne x_i représentant les alternatives a_i . Supposons aussi que a_k , pour un k fixé, est l'alternative optimale. Lorsque l'automate reçoit l'une des trois chaînes suivantes : $x_i x_k$ correspondant à $\{a_i\} \cup \{a_k\}$; $x_k x_i$ correspondant à $\{a_i\} \cup \{a_k\}$; ou $x_k x_k$ correspondant à $\{a_k\} \cup \{a_k\}$ c'est-à-dire à $\{a_k\}$; il doit retourner une chaîne de sortie correspondant à $\{a_k\}$. Donc les sorties correspondant à ces trois entrées auront toutes la même longueur. Par symétrie de la forme de l'entrée, le résultat est le même si l'alternative optimale est $\{a_i\}$ ²⁴. Donc toutes les entrées de la forme $x_i x_j$ auront une sortie de même longueur disons l . Par contre, l'alphabet de sortie d'un automate fini est fini, disons de taille n , il n'y a donc que n^l sorties de taille l possibles. Or il y a potentiellement un nombre infini d'entrées de la forme $x_i x_j$. L'automate associera donc forcément à deux choix disjoints, disons $\{a_i\} \cup \{a_i\}$ et $\{a_k\} \cup \{a_k\}$ exactement la même sortie, ce qui est contradictoire puisque ces choix ne contiennent pas d'alternative commune. Il est donc impossible pour un automate fini de modéliser un comportement rationnel.

²³ Ibid., p. 42.

²⁴ Cette symétrie n'est probablement pas évidente, l'explicitation technique est trop longue pour être reproduite intégralement, cf. Ibid., p. 49-50.

La mise en parallèle de deux tentatives de modélisation récursive de l'agent rationnel que sont la machine de Turing et l'automate fini révèle une caractéristique essentielle du comportement rationnel prescrit par l'économie classique : il nécessite pour être représenté procéduralement, une capacité de calcul – mémoire – infinie.

1.3 – La rationalité de l'agent rationnel

Les deux modèles rékursifs de l'agent rationnel que l'on vient de présenter nous renseignent déjà sur une caractéristique importante de la rationalité orthodoxe des agents économiques: pour être implémentée par une procédure récursive, elle nécessite au minimum une structure qui permet de gérer l'infini. L'automate fini n'a pas les ressources nécessaires pour évaluer l'ensemble des alternatives qu'implique la notion classique de choix rationnel tandis que la machine de Turing grâce à un espace mémoire potentiellement infini arrive à représenter le choix rationnel.

Par ailleurs, l'équivalence établie entre le choix d'un agent rationnel et le fonctionnement d'une machine de Turing peut nous permettre d'analyser plus finement la structure récursive du problème économique du choix individuel. Elle permet de répondre à des questions sur l'effectivité de la procédure récursive, sur la réalisabilité de la procédure générale qui permet de rationaliser une fonction de choix ou encore sur la résolubilité du problème auquel fait face l'agent qui doit ordonner ses préférences. On peut aussi poser des questions sur la *difficulté* du problème, c'est-à-dire sur la complexité algorithmique de la procédure qui résout le problème. Évidemment, dans cette analyse du contenu rékursif du choix économique, l'agent économique est toujours compris comme étant une machine de Turing.

Dans la section précédente, l'équivalence entre le choix rationnel et le fonctionnement de la machine de Turing prenait comme donnée la relation binaire qui permet l'ordonnancement des préférences. Le réel gain à utiliser ce genre d'analyse récursive est de permettre de répondre par la négative à une question théorique fondamentale à propos de la rationalité économique: Est-il possible pour un agent conçu comme une machine de Turing

de choisir rationnellement? Pour montrer comment on produit une solution négative à cette question, on peut décortiquer deux approches qui reposent sur des outils techniques différents. Une première preuve, due à Velupillai²⁵, qui repose sur un argument diagonal, a l'avantage d'être plutôt économe et de montrer rapidement les difficultés propres au problème. Une deuxième preuve, due à Alain Lewis²⁶, évite délibérément l'argument diagonal en dotant directement l'espace des alternatives offertes au choix d'une structure récursive. Cette méthode a au moins deux avantages que n'a pas la méthode directe de Velupillai, premièrement n'utilisant pas d'argument diagonal, elle n'ouvre pas la porte à une critique provenant de réflexions en philosophie de la logique sur l'existence d'énoncés paradoxaux dans les langages formels « [...] *it is a true statement about the non-existence of certain algorithms in number theory*²⁷... » Deuxièmement, en développant des outils techniques plus laborieux elle permet de comprendre plus précisément la complexité du problème analysé en comparaison à celle d'autres problèmes bien connus en théorie de la récursion.

2 – L'impossibilité du choix rationnel

2.1 – une preuve directe

En établissant l'équivalence entre le comportement des agents économiques et la description d'une machine de Turing, on a construit, pour décrire le comportement rationnel, un outil propre à la théorie de la calculabilité qui permet de pousser plus loin l'analyse de la rationalité. On peut par exemple se demander si les agents économiques peuvent agir de manière rationnelle. Cette question, dans le contexte de la théorie classique, n'a pas de sens mathématique direct, on peut argumenter au point de vue philosophique sur le réalisme des hypothèses, mais une fois les postulats acceptés le modèle *décrit* un comportement.

Par contre, en codant le problème pour qu'il soit manipulable par une machine de Turing, la question du choix rationnel peut se traduire ainsi: y a-t-il une procédure effective

²⁵ Velupillai, *Computable Economics The Arne Ryde Memorial Lectures*. 2000, p. 36 et suivantes.

²⁶ cf. Lewis, «On Effectively Computable Realizations of choice Functions». 1985.

²⁷ Ibid., p. 46.

qui permet d'ordonner les préférences? Ou encore y a-t-il une procédure effective pour rationaliser une fonction de choix? Une preuve directe de l'impossibilité de construire une telle procédure découle de l'analyse des machines de Turing utilisées pour représenter l'agent économique. La question de déterminer si il y a une procédure effective, un algorithme, qui permet d'ordonner des préférences est formulable, sous l'hypothèse de la thèse de Church-Turing, de la manière suivante : la bijection τ codant les ensembles d'alternatives à deux éléments est-elle calculable?

Soit a_i un agent qui veut évaluer systématiquement les alternatives qui lui sont offertes, pour deux alternatives x et y il peut utiliser la machine MT_i pour évaluer si la relation binaire R est vraie pour x et y , sur l'entrée $\tau(x, y)$ la machine s'arrête sur 1 ou 0 selon la valeur de $R(x, y)$. Puisque dans la théorie classique, les commodités sont des points de l'espace \mathbb{R}^I ²⁸ une évaluation systématique des alternatives doit passer en revue un ensemble non-dénombrable, nous serons ici *un peu* plus raisonnable en supposant que l'ensemble des alternative est infini dénombrable. Vérifier s'il est, en général²⁹, possible de rationaliser une fonction de choix revient à vérifier l'affirmation suivante:

$$\begin{aligned} \forall i \in I; \forall k \in \mathbb{N}; \forall l \in \mathbb{N}; \text{étant donné } n = \tau(k, l); \quad [1] \\ MT_i(n) = 0 \vee MT_i(n) = 1 \end{aligned}$$

La solution négative du problème de l'arrêt³⁰ nous permettrait d'affirmer tout de suite que la formule [1] est fausse. Par contre, Velupillai préfère produire un argument supplémentaire, qui évite cette voie. Soit MTU une machine de Turing universelle, ce type de machine permet de simuler les calculs de n'importe quelle autre machine de Turing, à l'aide de cette machine on peut reformuler [1] de la manière suivante³¹:

²⁸ cf. Debreu, *Théorie de la valeur*. 1984

²⁹ L'expression « en général » est utilisée dans un sens technique qui est équivalent à « dans le cas général », c'est-à-dire pour toutes les instances de même nature.

³⁰ Le problème de l'arrêt consiste à déterminer si une machine de Turing quelconque s'arrête ou non avec une entrée donnée. Ce problème est indécidable.

³¹ cf. Velupillai, *Computable Economics The Arne Ryde Memorial Lectures*. 2000, p. 39.

$$\begin{aligned} \exists MTU : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall MT_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ \exists m \text{ t.q. } \forall n \in \mathbb{N}; MT_i(n) = MTU(m, n) \end{aligned}$$

Intuitivement m est un index qui permet de faire correspondre le comportement de MTU à celui de MT_i . En utilisant cette machine de Turing universelle, on peut construire l'ensemble suivant:

$$\Gamma = \{n \text{ t.q. } MTU(n, n) \text{ est défini}\}$$

On voudrait maintenant vérifier que Γ n'est pas récursif³². En effet si Γ n'est pas récursif la relation binaire R qui permettrait une rationalisation de la fonction de choix n'est pas effectivement réalisable et il est impossible de trouver une procédure générale qui permettrait à un agent de choisir rationnellement. Notons d'abord que l'ensemble Γ est par définition récursivement énumérable puisque pour tout élément de Γ MTU est définie. Supposons maintenant qu'il soit aussi récursif. Ceci voudrait dire que la fonction caractéristique de Γ , disons η est calculable comme MTU est une machine de Turing universelle, $\exists a \text{ t.q. } \eta(n) = MTU(a, n)$ et elle peut être utilisée pour calculer η . Mais si si $a \notin \Gamma$ alors $\eta(a) = 0$ et on arrive à une contradiction, ainsi l'ensemble Γ n'est pas récursif et R n'est pas décidable, i.e. Qu'elle ne peut être effectivement réalisée.

³² Un ensemble d'entier E est récursif si sa fonction caractéristique, i.e.

$$\begin{aligned} f(x) : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin E \\ 1 & \text{si } x \in E \end{cases} \end{aligned}$$

est récursive. Dans ce cas, il est possible de déterminer pour tout entier s'il appartient ou non à E . Un ensemble F est récursivement énumérable si sa fonction caractéristique est calculable c'est à dire partielle récursive. Dans ce cas l'algorithme associé à la fonction caractéristique termine avec comme valeur 1 pour tout entier dans F , mais peut ne pas terminer pour les entiers dans le complément de F .

2.2 – une preuve indirecte.

Dans son article : *On effectively computable realizations of choice functions*³³, Alain Lewis s'intéresse à la question que nous venons de poser sur la possibilité de réaliser effectivement la rationalisation d'une fonction de choix en général. Cette fonction est rationnelle si elle est basée sur une relation binaire définie sur l'espace des choix et si elle identifie, parmi un sous-ensemble de l'espace des choix, les éléments maximaux. Le résultat auquel il arrive est essentiellement équivalent à celui de Velupillai, i.e. : «*If $C : F_{\mathbb{R}} \rightarrow F_{\mathbb{R}}$ is a recursively representable choice function that is rational in the sense of Richter, we prove that C has no recursive realization within Church's Thesis*³⁴.» Par contre, sa démarche est très différente de l'argument que nous venons de voir. Dans la preuve directe de Velupillai, les hypothèses mathématiques propres à l'économie orthodoxe sont maintenues le plus longtemps possible et le résultat d'impossibilité vient d'une contradiction tirée de l'équivalence entre le comportement de choix d'un agent rationnel et le fonctionnement d'une machine de Turing. En revanche, ici les hypothèses mathématiques qui servent à l'analyse sont formulées dès le début dans un langage récursif. Un espace de choix récursif est construit, qui possède les propriétés topologiques – compacité et convexité – nécessaires à la théorie du choix rationnel. Sur cet espace, des fonctions de choix rationnelles récursives sont représentées. La question devient alors de savoir si ces mêmes fonctions peuvent être réalisées. C'est dans le cadre de l'analyse computationnelle des fonctions récursives que les résultats de Lewis se situent. Ce cadre, plus général que l'équivalence de Velupillai, vise à comprendre la complexité de la tâche de réaliser récursivement les fonctions de choix rationnel. C'est en identifiant une borne inférieure à la complexité de cette tâche et en la comparant aux possibilités des paradigmes de calculs connus que le résultat est atteint. La conclusion très forte à laquelle on arrive est que l'exigence computationnelle de la réalisation

³³ Lewis, «On Effectively Computable Realizations of choice Functions». 1985

³⁴ Ibid., p. 43.

d'une fonction de choix rationnel dépasse les possibilités d'une machine de Turing qui est la machine de calcul théorique la plus puissante³⁵.

De ce théorème très général, des conclusions pour la théorie économique sont déduites. Les fonctions de demande ne sont pas calculables, les fonctions de choix social ne sont pas calculables. Finalement une fonction qui n'est pas calculable ne peut être économiquement rationnelle. « It is obvious that any choice function C that is not *at least computationally viable* is in a very strong sense *economically irrational*³⁶. »

3 – Modèles rékursifs

3.1 – Espace Métrique Rékursif

Je vais maintenant résumer l'esprit de la construction mathématique qui permet à Lewis de démontrer le théorème principal de son article. L'important est d'installer l'analyse dans un espace de choix qui conserve le plus possible les propriétés topologiques de l'ensemble \mathbb{R}^n essentielles à la formulation classique du choix rationnel, mais qui est doté d'une structure réursive assez riche pour permettre l'utilisation des outils de la théorie de la récursion. La construction retenue est celle qui se base sur les réels rékursifs. À partir des réels rékursifs qui sont définis comme des classes d'équivalence de nombres naturels – un nombre $n \in \mathbb{N}$ est un \mathbb{R} – indice de $\alpha \in \mathbb{R}$ si n est le nombre de Gödel associé à une fonction réursive qui permet de calculer α – on construit l'espace métrique $M(\mathbb{R})$ en dotant l'ensemble des réels constructifs d'une distance qui doit être une fonction partielle réursive. Cet espace métrique rékursif conserve des propriétés topologiques intéressantes de l'espace métrique \mathbb{R} , c'est un espace complet, séparable et connexe.

³⁵ Par ailleurs, Lewis considère que le résultat de Kramer présenté plus haut est très significatif puisque la famille de calculateurs que ce dernier considère est en quelque sorte une idéalisation plus réaliste des capacités cognitives des êtres humains.

³⁶ Lewis, «On Effectively Computable Realizations of choice Functions». 1985, p. 45.

3.2 – Fonction récursive de choix rationnel

Pour construire une fonction de choix rationnelle récursive, on définit tout d'abord à partir de $X \subset \mathbb{R}$ compact et convexe un sous-espace $R(X) \subset M(\mathbb{R})$ qui correspond aux réels rékursifs de X . Cet espace sera l'ensemble des alternatives du choix. On définit aussi $F_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des sous-ensembles rékursifs de $R(X)$ et $C: F_{\mathbb{R}} \rightarrow \wp(R(X))$ t.q. $C(A) \subset A$ un choix rékursif sur cet ensemble. Étant donné C , un choix rékursif sur $F_{\mathbb{R}}$ alors ce choix est rationnel s'il existe un ordre sur $R(X)$ et une fonction partielle réursive $f: R(X) \rightarrow \mathbb{N}$ qui préserve cet ordre et qui ensemble établissent que les éléments de $C(A)$ sont maximaux.

Nous disposons maintenant de tous les éléments pour énoncer le résultat principal de Lewis :

Sur la représentation récursive d'un sous-espace compact et convexe de \mathbb{R}^n tel que construit et qui représente l'ensemble des alternatives d'un choix. Soit $C: F_{\mathbb{R}} \rightarrow F_{\mathbb{R}}$ un choix rékursif rationnel qui n'est pas trivial, il n'existe pas de réalisation récursive de C .

La preuve est très technique, mais tient finalement à une analyse de la complexité computationnelle de la tâche de construire (rékursivement) la fonction caractéristique de l'ensemble $Graph(C)$. Cette complexité peut être évaluée et classée dans une hiérarchie de complexité. Le résultat tient au fait qu'elle est strictement supérieure à la complexité attaquant par les plus puissants modèles de calcul théorique.

«Thus from a mathematician's point of view, the foundations of neoclassical economics are hopelessly non-effective computationally and therefore must be considered irrational from the standpoint of computational viability once we leave the discrete, finite combinatorial domain of Campbell (1978) where compactness exists but not convexity³⁷.»

³⁷ Ibid., p. 46.

4 – Conclusion : Représentation et Réalisation

La présentation de Lewis a au moins trois avantages sur celle de Velupillai. Premièrement, rappelons que le style de la preuve est moins susceptible de rencontrer une opposition quant à sa validité logique, il ne s'agit pas d'un argument portant sur un paradoxe du langage formel utilisé pour décrire le choix rationnel, mais plutôt d'une démonstration de l'impossibilité de construire une fonction récursive capable de résoudre le problème de l'appartenance à l'ensemble $Graph(C)$. De plus, doté l'ensemble de choix d'une structure récursive a permis de faire une distinction impossible à établir pour Velupillai entre la *représentabilité* et *réalisabilité* récursive. Cette différence était évidemment implicite dans la démarche de Velupillai puisqu'on établissait une équivalence entre un agent rationnel et une machine de Turing avant de montrer qu'il était impossible de déterminer si cette machine était associée à une fonction récursive partielle ou totale. Par contre, cette distinction est explicitée par la démarche plus générale de Lewis et c'est souhaitable au niveau méthodologique. Ceci permet de comprendre la différence entre deux usages de l'application des mathématiques. Le premier usage permet de résoudre des problèmes positifs posés par une science empirique et le second permet de comprendre quelles sont les limites de la démarche adoptée et quels problèmes *ne peuvent être résolus*, par exemple trouver une méthode générale qui associe le comportement de choix rationnel d'un agent à celui d'une fonction calculable exige que la famille de fonction considérée soit *réalisable*. Par contre, pour produire un modèle récursif qui permet d'analyser les limites du modèle optimisateur de la rationalité, la *représentabilité* de cette même famille de fonction est suffisante.

Le troisième avantage de la méthode générale de formuler le problème à l'aide de la théorie des fonctions récursives, c'est que cette approche permet d'identifier la *difficulté* du problème. C'est-à-dire qu'en plus de savoir que le problème de rationaliser une fonction de choix est computationnellement complexe, il dépasse les capacités d'une machine de Turing, on peut évaluer cette complexité et la classer dans une hiérarchie de complexité. Par exemple, on peut affirmer que le problème général de rationaliser une fonction de choix est strictement plus complexe que le 10^e problème de Hilbert.

CHAPITRE II

L'ANALYSE RÉCURSIVE DE LA THÉORIE DES JEUX

Dans le chapitre précédent, j'ai présenté des arguments qui visaient à mettre en doute la possibilité de mener à bien le projet de la théorie du consommateur (théorie du choix rationnel) telle qu'elle est le plus souvent proposée par l'économie classique. Dans ce chapitre, c'est à un autre domaine de l'économie mathématique, qui est devenu un outil important de la théorie économique, que l'analyse selon le critère de la calculabilité sera appliquée. Comme la théorie du consommateur, la théorie des jeux est l'étude exhaustive du comportement d'agents – joueurs, firmes, investisseurs, etc. – qui ont pour objectif individuel de maximiser leurs gains. Par contre, innovation majeure, la théorie des jeux propose d'étudier *l'interaction* dans la prise de décision, c'est-à-dire la prise de décision par un agent rationnel influencé par les décisions d'autres agents³⁸.

Ce chapitre sera divisé en deux sections, dans la première section le vocabulaire et les résultats importants de la théorie des jeux seront présentés. Cette section sera basée sur le premier chapitre du texte fondateur de von Neumann et Morgenstern. En suivant la réflexion des auteurs, les concepts clés qui permettent la description d'un jeu et rendent possible un traitement mathématique seront détaillés. Ensuite, par l'analyse de l'article révolutionnaire de John Nash, qui présente un concept d'équilibre pour les jeux économiques et qui a rendu populaire cette théorie auprès des économistes, les différences entre la théorie classique et une théorie calculable des jeux seront abordées. La seconde section de ce chapitre sera consacrée à l'analyse du contenu calculable de la théorie des jeux. Les travaux de Rabin,

³⁸ cf. Osborne et Rubinstein, *A Course in Game Theory*. 1994

Velupillai et Lewis nous permettront d'identifier clairement l'inconfort vécu par les partisans de l'économie calculable, mais permettront aussi d'entrevoir une réconciliation partielle entre les limites nécessaires aux yeux de l'économie calculable et les résultats si utiles aux économistes de toutes confessions.

1 – von Neumann-Morgenstern : mathématiser l'interaction sociale

L'investigation à l'aide des mathématiques du fonctionnement des jeux de société date du 18^e siècle. Par contre, le coup de départ d'une véritable théorie mathématique des jeux a été donné par John von Neumann dans des publications s'échelonnant de 1928 à 1944 et culminant dans son ouvrage écrit conjointement avec Oskar Morgenstern, « *Theory of Games and Economic Behavior*³⁹ » (Dans la suite du texte, on abrégera par TGEb). Il faut souligner le caractère révolutionnaire de ce livre dans lequel, les auteurs se proposent d'inventer un nouvel outil mathématique pour résoudre le problème du comportement rationnel dans des contextes très généraux liés à l'interaction sociale des agents économiques. « *We hope to establish satisfactorily, after developing a few plausible schematizations, that the typical problems of economic behavior become strictly identical with the mathematical notions of suitable games of strategy*⁴⁰. » L'analyse théorique du comportement rationnel faisait déjà l'objet, à l'époque, d'un traitement mathématique. TGEb propose une critique de l'usage, en économie, des outils mathématiques traditionnels, inventés pour le développement de la physique. Le traitement de l'économie, science plus jeune au sujet plus complexe et plus difficile⁴¹, appelle d'après les auteurs une mathématique nouvelle. Pour eux, l'usage des mathématiques pour le traitement des problèmes économiques n'est certes pas impossible, ils considèrent les critiques habituelles qui évoquent l'impossibilité de mesurer les facteurs importants de l'analyse économique du comportement ou l'impossibilité de faire un traitement mathématique des sciences qui s'intéressent à « l'humain » comme autant de pétitions de principe. Le véritable obstacle à l'élaboration d'une économie mathématique efficace se

³⁹ Neumann et Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. 2004

⁴⁰ Ibid., p.2

⁴¹ Ibid., p.2 §1.2.1

trouve plutôt dans la formulation des problèmes économiques. *«To begin with, the economic problems were not formulated clearly and are often stated in such vague terms as to make mathematical treatment a priori appear hopeless because it is quite uncertain what the problems really are»*⁴².» La méthode utilisée pour le développement systématique de la théorie des jeux vise donc à pallier cette imprécision dans la formulation des problèmes. Les problèmes choisis le seront non pas sur la base de leur importance relative en théorie économique, mais sur la base de la possibilité de les énoncer précisément dans un langage formel. La prétention des auteurs est que ceci peut permettre de développer une méthode adéquate qui pourra par la suite s'appliquer à un ensemble toujours plus vaste de problèmes. La progression méthodologique doit donc aller d'une théorie mathématique basée sur les cas les plus simples vers une théorie plus complexe et plus générale. Dans un premier moment « d'application-corroboration », les résultats mathématiques doivent se calquer sur les résultats déjà obtenus sans les mathématiques. Dans un second moment, le développement mathématique produira des résultats nouveaux et suggérera des avenues de recherches en théorie économique.

1.1 – Une nouvelle perspective : impasse de la maximisation

Sur le point de départ de l'analyse de l'économie, TGEB s'accorde avec les canons de l'économie néo-classique :

*«In the course of the development of economics it has been found, and it is now well-nigh universally agreed, that an approach to this vast problem is gained by the analysis of the behavior of the individuals which constitute the economic community»*⁴³.

De plus, il faut supposer que le comportement de l'individu qui est pertinent pour l'analyse économique a pour objectif de maximiser l'utilité. Par contre, le traitement traditionnel de ce comportement « rationnel » d'optimisation est, selon von Neumann et Morgenstern déficient à plusieurs égards. Premièrement parce qu'il n'a été formulé mathématiquement que de

⁴² Ibid., p.4

⁴³ Ibid., p. 8.

manière ambiguë, mais aussi, car les relations entre la connaissance de l'agent sur ses possibilités d'action et ses choix ne sont pas analysées. C'est ce que l'approche du problème économique comme un problème de jeu de stratégie visent principalement à comprendre.

Cela dit, la motivation principale pour rejeter la méthode traditionnelle vient du fait que le comportement qui intéresse l'économie est un comportement social. Dans un contexte où un agent seul aurait à prendre des décisions économiques, il serait envisageable que les mathématiques « physiques », qui sont appropriées à résoudre des problèmes de maximisation, soient à même de fournir une théorie complète et adéquate du comportement. En effet, si l'économie est constituée d'un seul agent celui-ci *contrôle* toutes les variables du problème d'optimisation qui se pose à lui. Dans ce cas, la maximisation de l'utilité, étant donné une valeur fixée de ses variables, est un problème que le calcul mathématique peut résoudre aisément. *«This is [...] indeed an ordinary maximum problem, its difficulty depending apparently on the number of variables and in the nature of the function to be maximized; but this is more of a practical difficulty than a theoretical one»⁴⁴.* Par contre, lorsque l'agent économique est dans un contexte social, c'est-à-dire que son action est une interaction avec d'autres agents, ses décisions doivent prendre en compte des variables sur lesquelles il n'a pas le contrôle *et* qui sont le résultat des décisions des autres agents. Il y a certainement beaucoup d'autres différences entre l'agent isolé et l'agent social, mais TGEB soutient que *la seule différence qui modifie le problème formel du comportement rationnel vient de l'indétermination de l'action des autres agents*⁴⁵. La seule incertitude pertinente en théorie des jeux est celle qui provient de l'action des autres agents. Pour ce qui est du contexte dans lequel s'effectue le choix de l'agent :

«we cannot avoid the assumption that all subjects of the economy under consideration are completely informed about the physical characteristics of the situation in which

⁴⁴ Ibid., p.10.

Dans le chapitre précédent concernant la rationalité de l'agent économique, la possibilité théorique de résoudre un tel problème maximal a été explorée. La conclusion étant que la difficulté n'est pas seulement pratique, mais que, sauf pour les cas triviaux, l'agent économique est dans l'impossibilité théorique de résoudre un tel problème.

⁴⁵ Ibid., p.12.

*they operate and are able to perform all statistical, mathematical, etc., operations which this knowledge makes possible*⁴⁶.»

La théorie proposée suppose donc une information complète, c'est-à-dire une connaissance de la structure du jeu, des stratégies disponibles à chaque joueur et des gains associés à chaque résultat pour chaque joueur. L'importance de cette hypothèse et les débats liés à son utilisation, ne sont pas négligés par les auteurs, mais ils soutiennent que le développement de la théorie des jeux permet de résoudre certaines difficultés normalement attribuées à l'hypothèse d'information complète en montrant que ces difficultés sont en fait liées à l'interaction des agents.

Dans un contexte où les décisions de plusieurs agents sont dépendantes les unes par rapport aux autres, la méthode de maximisation, qui était utile pour l'agent isolé, est impraticable : *«A guiding principle cannot be formulated by the requirement of maximizing two (or more) functions at once*⁴⁷.» Paradoxalement, dans un contexte d'interaction, résoudre le problème de maximisation pour un agent n'est pas équivalent à résoudre le problème économique de façon optimale. Si l'interaction était factice, c'est-à-dire si un agent pouvait décider du comportement de tous, alors il pourrait maximiser son gain et le gain obtenu serait probablement supérieur à celui obtenu dans le résultat optimal d'un jeu d'interaction réelle où chaque agent décide pour lui-même.

Il faut noter ce point discuté par les auteurs : cette divergence entre le problème maximal et le problème économique global, n'existe que lorsque l'on envisage, du point de vue d'un agent particulier, que les décisions des autres agents ne soient pas rationnelles. Dans la théorie du consommateur, il est contraire aux hypothèses d'accepter la possibilité que certains agents ne se comportent pas de manière rationnelle. Le comportement de chaque

⁴⁶ Ibid., p.30.

⁴⁷ Ibid., p.11

À l'éclairage des résultats mathématiques de la théorie de l'équilibre général obtenus dans les années 1950, ce genre de constatation peut sembler étrange, voire carrément faux. Il faut constater que les techniques mathématiques qui permettent la démonstration de l'existence d'un équilibre général, lequel correspond effectivement à la résolution simultanée par chaque agent d'un problème de maximisation, *ne font pas appel au calcul différentiel et n'essaient pas de maximiser des fonctions d'utilités*. Elles caractérisent ses fonctions d'utilités par des ensembles de points et déterminent les propriétés topologiques (particulièrement la convexité) que ces ensembles doivent posséder pour satisfaire les conditions d'existence d'un équilibre.

consommateur est déterminé par une variable précise, le prix. Par contre, chaque agent a une action *qui n'influence pas* le prix. Ainsi malgré le fait que l'agent est dans une situation sociale, son comportement étant entièrement déterminé par une variable *indépendante*, il fait face à un problème très semblable à celui d'un agent isolé⁴⁸. Par contre, pour les auteurs de TGEB, lorsque l'on analyse la prise de décision d'un agent, on ne décrirait pas de manière complète une situation de choix si l'on supposait que tous les autres agents se comportent rationnellement.

«In whatever way we formulate the guiding principles and the objective justification of "rational behavior", [...] then its description must include rules of conduct for all conceivable situations – including those where "the others" behaved irrationally, in the sense of the standards which the theory will set for them»⁴⁹.

Il ne serait par contre pas suffisant de pallier l'incertitude face au comportement des autres agents en dotant leurs décisions possibles d'une distribution de probabilités⁵⁰. Cela reviendrait à dire qu'ils se comportent aléatoirement. En fait, il faut postuler une certaine *symétrie* et supposer que tous les agents se comportent selon des *principes de rationalité équivalents*, l'identification de tels principes et la compréhension de la dynamique que fait naître l'interaction d'intérêts conflictuels devraient être le résultat de l'analyse du comportement économique par la théorie des jeux.

⁴⁸ « Indeed price competition is ruled out by a literal reading of simple model, such as those of a simple consumption system and of a competitive production system in which decision-makers are all price-takers. »

Hausman, *The Inexact and Separate Science of Economics*. 1992, p.49. Je souligne.

⁴⁹ Neumann et Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. 2004, p.33

⁵⁰ Ibid., p.11

1.2 – Trois concepts clés : solution, domination et stratégie

Avant de décrire formellement la structure d'un jeu et la nature d'une solution, TGEB propose une discussion intéressante du concept d'utilité. Ce concept est présenté avant la description formelle d'un jeu, parce que le comportement des agents doit être compris comme une forme d'optimisation dont l'objectif est une plus grande utilité. La description de l'utilité par les auteurs est quelque peu anachronique, en ce sens que TGEB milite pour un concept d'utilité mesurable. À l'époque, cette théorie cardinale a été largement abandonnée au profit d'une théorie ordinale de l'utilité représentée par les courbes d'indifférence. Les efforts antérieurs pour évaluer l'utilité numériquement ont été abandonnés par les économistes, mais en acceptant les hypothèses, légèrement plus restreintes, de la théorie des courbes d'indifférence, la description d'une méthode de mesure de l'utilité s'appuie sur les probabilités⁵¹.

La stratégie adoptée par von Neumann et Morgenstern pour construire une mesure de l'utilité est similaire à la méthode développée par Frank Ramsey pour mesurer les probabilités subjectives nécessaires à une théorie logique des croyances partielles. La théorie de Ramsey était malheureusement inconnue des auteurs de TGEB⁵², mais puisqu'elle est chronologiquement antérieure et par certains aspects supérieure⁵³, c'est la théorie de Ramsey qui sera ici l'objet de notre étude. En étant à la fois plus économe et plus complète, la théorie de Ramsey apparaît comme une solution plus élégante au problème de définir une mesure subjective de l'utilité. Par ailleurs, par sa grande similarité avec celle des auteurs de TGEB elle est à même d'en fonder les concepts clés.

Contrairement à von Neumann et Morgenstern, Ramsey arrive à une théorie de l'utilité qui ne suppose pas une connaissance objective des probabilités par l'agent. La théorie de Ramsey fonde en même temps une mesure des degrés de croyances partielles et une mesure des probabilités subjectives. Il est important pour Ramsey d'arriver à une *mesure*

⁵¹ Cf. Ibid., §3.1.2 et §3.3.1 pp.16-17.

⁵² Kuhn et Tucker, «John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics». 1958, p. 109

⁵³ Cf. Jeffrey, *The logic of decision*. 1965, chapitre 3 et Sahlin, *Frank Ramsey (1903-1930)*. 2001

purement psychologique des degrés de croyance c'est-à-dire qui n'est pas d'abord la mesure d'une probabilité. Cette mesure doit avoir certaines caractéristiques. Premièrement, toutes les croyances doivent avoir un degré, deuxièmement ces degrés doivent pouvoir être ordonnés, troisièmement on doit pouvoir définir une identité de degré qui fournit une relation d'équivalence⁵⁴. Aussi, la mesure doit être numérique. Si la logique des croyances partielles doit être un *calcul* des probabilités, il devient impératif de mesurer les degrés de croyance de manière significative. Le problème étant principalement de proposer une méthode qui arrive à cet objectif d'associer à *chaque* croyance un nombre et pas seulement 1 à la certitude ou 0 à la certitude du contraire.

La clé de la méthode de Ramsey est de traiter le degré d'une croyance comme une propriété causale, liée à l'action de l'agent qui possède la croyance. Ceci est tellement important pour Ramsey qu'il va jusqu'à dire :

Je crois que dans plusieurs cas notre jugement concernant la force de notre croyance porte vraiment sur ce que nous devrions faire dans des circonstances hypothétiques. [...] Il est possible que ce qui détermine comment nous devrions agir nous incite aussi, directement ou indirectement, à avoir une opinion correcte quant à la manière dont nous devrions agir, sans que cela ne vienne jamais à la conscience⁵⁵.

L'introspection n'est pas nécessaire pour évaluer la force de nos croyances, il est suffisant d'évaluer les actions qu'elles peuvent causer. D'ailleurs, pour Ramsey, même si le degré de croyance pouvait être mesuré par introspection, cette mesure ne serait pas appropriée à un calcul des probabilités, la mesure appropriée est celle qui traite la croyance en tant que disposition à l'action. Par exemple, alors que la mesure de l'intensité du sentiment peut varier considérablement d'un individu à l'autre et qu'elle n'est pas naturellement compatible avec une échelle $[0,1]$, la mesure de la disposition à l'action est susceptible d'une plus grande objectivité et convient à l'échelle $[0,1]$ ⁵⁶. La méthode développée par Ramsey est basée sur la méthode du pari, qu'elle cherche à raffiner en s'appuyant sur une théorie psychologique. Cette théorie explique l'action comme le résultat d'une évaluation des croyances et des désirs : l'action choisie est celle que l'agent croit susceptible de réaliser ses désirs. Cette théorie de

⁵⁴ Ramsey, *Logique Philosophie et Probabilités*. 2003, p.162. Ramsey soulève que cette identité dans la mesure est théorique et arbitraire, mais qu'elle n'est pas plus problématique qu'en physique.

⁵⁵ Ibid., p. 165.

⁵⁶ Ibid., p. 165.

l'action somme toute assez rudimentaire n'est pas loin des hypothèses de TGEb. D'ailleurs, Ramsey remarque déjà les caractéristiques qui la rendront désirable pour le développement de la conception économique de la rationalité :

On se doit de faire remarquer que cette théorie ne doit pas être identifiée à la psychologie des utilitaristes dans laquelle le plaisir occupe une position dominante. La théorie que je propose d'adopter est que nous recherchons les choses que nous désirons, ce qui est notre propre plaisir ou celui des autres, ou n'importe quoi d'autre et que nos actions sont telles qu'elles nous permettent d'obtenir ces biens⁵⁷.

Après avoir choisi un cadre théorique pour décrire la psychologie de l'agent, le problème qui se pose pour Ramsey est de définir les critères de décision lorsque l'on a des croyances partielles. Pour arriver à ses fins, il introduit le concept d'espérance mathématique : « Je suggère que nous introduisions comme loi de la psychologie que son comportement est gouverné par ce qui s'appelle la prévision mathématique⁵⁸. » La définition contemporaine de l'espérance mathématique correspond à la moyenne des résultats possibles d'une variable aléatoire pondérés par leur probabilité⁵⁹. Pour Ramsey, le concept semble moins précis. Il associe l'espérance mathématique à un calcul que fait l'agent dans lequel tout événement qui dépend de la réalisation de la croyance p est pondéré par *la même* fraction et cette fraction est exactement le degré de croyance de l'agent envers p . L'idée de Ramsey c'est que si l'agent obéit à « une loi » psychologique qui le fait se comporter selon l'espérance mathématique, on peut décrire des « montages expérimentaux » qui permettent de mesurer le degré de croyance, par l'intermédiaire des probabilités subjectives. Cette mesure s'effectue à l'aide d'un pari. Les cotes d'un pari accepté par un agent représentent le degré de croyance qu'il a envers l'objet du pari. En présentant à l'agent un pari dont l'objet est la vérité d'une croyance, il sera possible de mesurer son degré de croyance. La première étape consiste à supposer que l'agent peut toujours comparer des alternatives et choisir celle qui emporte sa préférence :

Si nous avions le pouvoir du Tout-Puissant et si nous pouvions persuader notre sujet de notre puissance, nous pourrions, en lui offrant des options, découvrir comment il a placé par ordre de mérite tous [sic] les situations possibles (possible courses) du

⁵⁷ Ibid., p. 167.

⁵⁸ Ibid., p. 168.

⁵⁹ Si X est une variable aléatoire de loi de probabilité $p(\cdot)$ alors l'espérance mathématique $E[X]$ est définie par l'équation $E[X] = \sum_{x:p(x) \geq 0} x \cdot p(x)$, cf. Ross, *Initiation aux probabilités*. 2002, p.126

monde. De cette manière, tous les mondes possibles seraient placés par ordre de valeur, mais nous ne disposerions d'aucun moyen défini de les représenter par des nombres⁶⁰.

La deuxième étape est de donner une valeur à ces mondes possibles. Pour ce faire, Ramsey développe une méthode de mesure qui peut évaluer l'utilité des différentes options en se basant sur une seule valeur de probabilité, cette valeur est celle qu'il attribue à une proposition éthiquement neutre, $1/2$. Une proposition éthiquement neutre est une proposition dont la vérité ou la fausseté n'influence pas le comportement d'un agent face à un pari ou la vérité de la proposition intervient dans le résultat⁶¹. À l'aire de cette proposition, il est possible de construire sur tous les mondes possibles un ordre qui est isomorphe aux nombres réels ainsi, elle permet d'associer à chaque monde possible une position dans un ordre et une fois fixée la valeur d'un des éléments dans cet ordre, chaque monde possible a une *valeur* pour l'agent. Avec cette construction, tout comme von Neumann et Morgenstern, Ramsey définit en fait une fonction d'utilité et cette fonction est définie à une transformation linéaire près. Finalement, la troisième étape repose sur la comparaison d'un monde possible α servant de référence à une proposition du type : β si p est vraie et γ si p est fausse, le degré de croyance en p est construit à partir des valeurs données par l'agent aux alternatives α , β et γ . La proposition p a donc une probabilité subjective pour l'agent qui a pour valeur un ratio construit à partir des valeurs de α , β et γ ⁶².

De manière similaire à la définition du degré de croyance par Ramsey, von Neumann et Morgenstern⁶³ définissent la valeur numérique de l'utilité par une expérience probabiliste. L'utilité d'un événement A sera mesurée par sa comparaison avec une loterie basée sur des événements B et C jugés respectivement moins et plus utiles que A . La valeur des probabilités associées à B et C quand la loterie est jugée indifférente de A nous permet de mesurer la valeur de l'utilité associée à A . Ainsi, il est possible de donner une mesure numérique de l'utilité pour permettre à l'agent rationnel d'optimiser son comportement. Après avoir

⁶⁰ Ramsey, *Logique Philosophie et Probabilités*. 2003, p. 170

⁶¹ Cf. Ibid., p. 170

⁶² cf. Ibid., p.172 et Jeffrey, *The logic of decision*. 1965, p.41

⁶³ Neumann et Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. 2004, §3.3, pp.17 et suivantes.

construit une théorie cardinale de l'utilité, la structure d'un jeu peut être analysée pour comprendre ce que devrait être une solution d'un jeu.

Le concept de solution que l'on aimerait obtenir de l'analyse d'un jeu de stratégie devrait avoir deux composantes : un comportement (rationnel) à adopter et le résultat (optimal) que ce comportement garantit au joueur. Une *solution* doit offrir ces deux données pour toutes les situations possibles dans le jeu. Ainsi, le concept de solution correspond à un ensemble de règles qui dicte à chaque participant un comportement dans chaque situation possible. Si le comportement prescrit par la solution découlant de l'analyse d'un jeu de stratégie est un comportement rationnel, c'est parce qu'il établit le gain maximum que le joueur peut obtenir. Évidemment, ce montant est maximum non pas dans un sens global, mais en tenant compte de la structure interactive du jeu⁶⁴.

La solution d'un jeu devrait contenir cette information pour tous les participants, et non pas pour un seul joueur. Sous présentation de la structure d'un jeu, si tous les déroulements possibles d'un jeu sont énumérés avec les résultats du jeu suivant chaque déroulement, fournir une solution c'est identifier un ou des déroulements optimaux ainsi que les résultats du jeu pour chaque joueur selon ces déroulements. Cette distribution qui précise le gain que chaque joueur obtiendra est appelée *imputation*. Contrairement à l'idée que l'on pourrait se faire à première vue, la solution d'un jeu ne consiste généralement pas en une imputation unique. Il se peut que plusieurs scénarios satisfassent les conditions requises pour être une solution au jeu, sans qu'ils soient entre eux comparables. Dans ce cas, la solution consistera en un *ensemble d'imputations* plutôt qu'en une imputation unique.

TGEB développe la théorie générale des jeux, mais élabore progressivement la théorie à partir des jeux coopératifs, c'est-à-dire des jeux dans lesquels les joueurs peuvent former des coalitions. Dans ce contexte, on peut identifier l'ensemble des jeux qui auront comme solution une imputation unique, ce sont les jeux de somme nulle à deux joueurs. Les jeux à somme nulle sont des jeux pour lesquelles les gains et les pertes des joueurs s'équilibrent. Puisqu'il n'y a que deux joueurs qui s'affrontent, ces jeux ne peuvent évidemment pas voir naître de coalition. Par contre, dès qu'il y a plus de deux joueurs, les

⁶⁴ Si le joueur déterminait les actions des autres joueurs lui-même, il pourrait s'assurer un gain plus grand!

coalitions seront possibles et la nature symétrique de ces coalitions fera en sorte que chacune définira une imputation différente qui sera une solution du jeu. Par exemple, si l'on a trois joueurs : A , B et C on peut voir A et B s'allier contre C ou A et C contre B ou encore B et C contre A . Dans chaque cas une solution est possible et rien ne permet de déterminer en principe quelle coalition émergera.

«Thus only the three alliances and their imputations together form a rational whole which determines all of its details and possesses a stability of its own. It is, indeed, this whole which is the really significant entity, more so than its constituent imputations. Even if one of these is actually applied, i.e. If one particular alliance is actually formed, the others are present in a « virtual » existence: Although they have not materialized, they have contributed essentially to shaping and determining the actual reality⁶⁵.»

Voici donc la forme la plus générale de solution à laquelle devra arriver une formalisation des jeux : un ensemble d'imputations optimales, qui a une certaine stabilité⁶⁶.

La caractéristique principale d'une solution vient d'être définie, par contre, nous n'avons encore aucun moyen d'évaluer la supériorité d'une imputation sur une autre. Le concept de *domination* est celui retenu dans TGEB, il y est présenté de la manière suivante : si dans un jeu un nombre suffisant de joueurs préfère x à y et sont capables de garantir que x sera le résultat, alors « x domine y ». Cette relation de *domination* est fortement apparentée à un ordre, elle entretient un lien intime avec l'ordre des préférences de chaque joueur. Par contre, si l'ordre sur les préférences permet à l'agent, dans la théorie classique, de trouver l'action qui *maximise* son utilité, c'est parce que cet ordre a la propriété d'être transitif. Or, on a vu que dans le contexte d'un jeu de stratégie, dès que le nombre de joueurs dépasse deux, des coalitions peuvent se former pour imposer un résultat qui leur semble favorable. Dans ce cas, la solution n'est plus unique. Cette caractéristique empêche la relation de domination d'être transitive, regardons un exemple : il s'agit de partager un total de 1 entre 3 joueurs : A , B et C . Imaginons x , y , z trois imputations possibles et les préférences de chaque joueur :

⁶⁵ Neumann et Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. 2004, p. 36

⁶⁶ Ces notions d'optimalité et de stabilité sont pour l'instant encore floues, elles découleront du critère de comparaison des imputations possibles.

Pour $A: x > y > z$

Pour $B: y > z > x$

Pour $C: z > x > y$

Dans ce cas, x domine y car A et C trouvent x préférable à y et s'ils forment une coalition ils pourront imposer x . De plus, y domine z car A et B trouvent z préférable à x . Si la relation de domination était transitive, on devrait avoir que x domine z . Par contre, ce n'est pas le cas, dans l'exemple on a même que z domine x . Parce que la relation de domination ne permet de comparer que deux imputations à la fois et qu'elle peut dépendre pour chaque comparaison distincte de coalitions différentes, elle ne peut profiter de la propriété de transitivité. Si la relation sur les préférences définie par la théorie économique classique se doit d'être transitive, la relation de domination, qui combine les préférences de plusieurs joueurs, n'hérite pas de cette belle propriété⁶⁷.

Avec le concept de domination, une formulation claire d'un critère pour identifier une solution à un jeu stratégique est possible. Une solution S doit être un ensemble d'imputations qui est tel que :

(a) \forall imputation $i \notin S, \exists s \in S$ t.q. s domine i

(b) \forall imputation $s \notin S, \neg \exists s' \in S$ t.q. s' domine s

Donc toute imputation qui n'appartient pas à la solution est dominée par une imputation de la solution et les imputations de la solution ne sont dominées par aucune autre imputation de la solution. Dans l'exemple plus haut, au plus une des imputations peut faire partie d'une solution puisque dans chaque couple de solutions, une est dominée par l'autre.

Le dernier concept que la présentation de TGEB permet de mettre en place, concept qui sera essentiel dans l'analyse réursive de la théorie des jeux, est la notion de *stratégie*. Ce concept est introduit par les auteurs dans le but de simplifier la présentation formelle d'un jeu.

⁶⁷ Il y a certainement un lien fort intéressant entre le fait que d'une part la relation de domination n'hérite pas des propriétés de la relation de préférence sur laquelle elle est basée et le fait que d'autre part le choix social ne peut représenter de manière, mathématiquement, satisfaisante les choix individuels des membres du groupe. Cf. Arrow, «Rational Choice Functions and Orderings», 1959

Pour être complète, la présentation d'un jeu doit contenir : la longueur maximum d'un jeu⁶⁸, l'ensemble de tous les déroulements possibles du jeu, le résultat de chaque déroulement pour chaque joueur, l'information⁶⁹ disponible à chaque joueur et les probabilités, s'il y a lieu, des coups aléatoires. On verra que ces données peuvent être efficacement remplacées par l'énoncé des stratégies adoptées par les joueurs.

La définition informelle d'une stratégie est assez intuitive, la stratégie d'un joueur est un plan qui dicte les coups à jouer dans le jeu. Cette notion de stratégie entretient un lien étroit avec la notion d'information. En effet, le choix d'un coup particulier dépend de la quantité d'information disponible au joueur au moment de choisir. Par contre, l'information disponible à un joueur dans un jeu se résume aux règles, qui sont toujours explicitées à l'avance, aux coups déjà joués et aux intentions de ce joueur, mais ne contient pas, en général, les coups futurs de l'adversaire ni ses intentions. Ainsi, l'information d'un joueur augmente progressivement avec le déroulement du jeu. Malgré cette augmentation progressive de l'information, la stratégie pour remplir son rôle doit permettre au joueur d'établir un plan de match avant que l'information ne soit disponible. Pour ce faire, la notion formelle de stratégie est définie de telle sorte qu'elle dicte au joueur pour *chaque situation possible* du jeu, un comportement à adopter. Ainsi, en explorant à l'avance toutes les situations possibles du jeu et en considérant le comportement à adopter dans chaque situation, le joueur peut choisir dès le début de la partie une stratégie qui résume à l'avance son comportement pour le jeu.

Ainsi, toutes les données qui étaient nécessaires à la description d'un jeu peuvent se résumer à l'aide de la notion de stratégie et la description du jeu s'en trouve grandement simplifiée : elle consiste à donner le nombre de stratégies pour chaque joueur et le résultat pour chaque joueur de toutes les combinaisons de stratégies possibles. Évidemment, la simplification de la présentation est une simplification formelle. En pratique, cette énumération peut s'avérer impossible à faire : «*Consider a given player [...] Form all*

⁶⁸ Dans la formulation de TGEB, un jeu doit être fini en ce sens que tout jeu doit contenir une clause qui permet à chaque partie de terminer en un nombre fini de coups.

⁶⁹ Dans TGEB, le traitement axiomatique du concept d'information à partir de la théorie des ensembles est très détaillé, les éléments techniques ont été omis ici. cf. Neumann et Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. 2004, pp.67 et suivantes.

*possible strategies of his, [...]. While their number is enormous, it is obviously finite*⁷⁰.» Si le nombre de stratégies pour un joueur doit être fini, il peut être colossal, maintenant lorsqu'on doit considérer toutes les combinaisons de stratégies disponibles à chaque joueur on voit rapidement les *limites pratiques* de cette forme de description.

Néanmoins, la *notion théorique* de stratégie joue un rôle fondamental dans le développement de la théorie des jeux. Elle amène une organisation de l'information relative à un jeu qui permet de tirer des conclusions quant au déroulement des parties de ce jeu. Par exemple, s'il est possible de montrer que dans un jeu donné, un joueur possède une stratégie gagnante, alors l'issue du jeu est connue de tous à l'avance. Elle permet aussi de classer les jeux formels, les *jeux déterminés* sont ceux pour lesquels un joueur a une stratégie gagnante. D'ailleurs, les résultats principaux produits par von Neumann et Morgenstern puis par John Nash reposent sur une analyse de cette notion.

2 – John Nash : des résultats généraux.

Dans *Equilibrium points in N-Person games*, un article d'à peine plus d'une page, John Nash produit l'un des résultats les plus importants de la théorie des jeux. Dans cet article, il décrit la structure d'un jeu à n joueurs à l'aide du concept de stratégies mixtes. Une stratégie mixte est une loi de probabilités sur l'ensemble des stratégies pures d'un joueur. Les stratégies pures sont ici définies de manière similaire à la définition de TGEB. Comme chaque stratégie mixte impose une certaine distribution de probabilités, mais que ces probabilités peuvent varier de manière continue, l'ensemble des stratégies mixtes est un ensemble infini, compact et convexe. Ceci est dû au fait que la probabilité associée à chaque stratégie pure peut prendre n'importe quelle valeur réelle de 0 à 1 à la condition que la somme de ces probabilités soit toujours 1. Étant donné la nature probabiliste d'une stratégie mixte, le gain associé à une telle stratégie doit être mesuré à l'aide de l'espérance mathématique, moyenne des résultats possibles pondérés par la probabilité associée à chacun. Si l'on considère un vecteur composé de la stratégie mixte choisie par chaque joueur, on peut

⁷⁰ Ibid., p. 82

interpréter ce vecteur comme un point dans le produit cartésien⁷¹ des espaces des stratégies de chaque joueur. La première définition qui sera utilisée est celle d'un point bloquant⁷² : «*One such n -tuple counters another if the strategy of each player in the countering n -tuple yields the highest obtainable expectation for its player against the $n-1$ strategies of the other players in the countered n -tuple*⁷³.» Donc, un point en bloque un autre si pour tous les joueurs, la stratégie dans le point bloquant produit la *meilleure* espérance de gain compte tenu des $n-1$ stratégies des autres joueurs dans le point bloqué. Si s_i^* représente la stratégie du joueur i dans le point bloquant et s_i celle du même joueur dans le point bloqué on a formellement :

$$(s_1^*, s_2^*, \dots, s_{n-1}^*, s_n^*) \text{ bloque } (s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n) \text{ si } \forall i (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i^*, s_{i+1}, \dots, s_{n-1}, s_n) \text{ maximise l'espérance mathématique pour le joueur } i$$

Donc pour un joueur donné, si un point en bloque un autre, il est préférable pour lui de modifier sa stratégie pour adopter celle identifiée dans le point bloquant. Étant donnée cette définition, un équilibre pour le jeu est défini par Nash comme un point du produit cartésien qui est autobloquant⁷⁴. Si un point est autobloquant, les stratégies *actuelles* de chaque joueur produisent l'espérance de gain la plus élevée compte tenu des stratégies *actuelles* de tous les autres joueurs et personne n'a intérêt à modifier unilatéralement sa stratégie. Si les stratégies des autres joueurs ne changent pas, chacun a déjà la stratégie qui rapporte le plus grand gain. Ceci correspond bien à la compréhension intuitive d'un équilibre pour le jeu. Avec la notion d'équilibre ainsi formalisée, Nash utilise le théorème de Kakutani et en déduit que *pour chaque jeu à N joueurs il existe un équilibre*. Le théorème du point fixe de Kakutani⁷⁵ est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer, il donne les conditions pour qu'une

⁷¹ Voir la note 5.

⁷² Traduction de *countering*.

⁷³ Nash, «The Bargaining Problem». 1950, p.49

⁷⁴ Traduction de *self-countering*.

⁷⁵ Voici l'énoncé de ce théorème:

Soit X un sous-ensemble compact et convexe de \mathbb{R}^n et soit $f: X \rightarrow X$ une fonction à valeur ensembliste dont le graphe est un ensemble fermé et pour laquelle $\forall x \in X; f(x)$ est non-vide et convexe. Alors, $\exists x^* \in X$ t.q. $x^* \in f(x^*)$.

Traduction de Osborne et Rubinstein, *A Course in Game Theory*. 2004, p. 20.

fonction, à valeur ensembliste, possède un point contenu dans sa propre image. Ce point, laissé inchangé par la fonction, est un point fixe, dans la nomenclature de la théorie des jeux, c'est un équilibre.

«From the definition of countering, we see that the set of countering points of a point is convex. By using the continuity of the pay-off functions we see that the graph of the mapping is closed. [...] Since the graph is closed and since the image of each point under the mapping is convex, we infer from Kakutani's theorem that the mapping has a fixed point⁷⁶.»

Sans entrer dans les détails, le point fixe garanti par le théorème de Kakutani est précisément un point (une liste de stratégie) qui fait partie de l'ensemble des points qui le bloquent. C'est donc un point autobloquant, un équilibre. Ce résultat est d'une généralité exceptionnelle, *rien n'est précisé à propos de la structure du jeu*. La seule construction nécessaire au résultat est la stratégie mixte. Une fois la possibilité de former des stratégies mixtes acceptée, le théorème garantit l'existence d'un équilibre pour le jeu.

La réception des résultats de Nash⁷⁷ en théorie économique a été très positive. D'une part, sa solution au problème du marchandage a connue des applications dans de nombreux domaines de l'économie⁷⁸. D'autre part, en montrant que tous les jeux et pas seulement les jeux de 2 joueurs à somme nulle possèdent un équilibre, il a fourni la motivation nécessaire au développement de l'analyse mathématique des jeux comme outil en théorie économique. D'ailleurs, ce concept particulier d'équilibre porte le nom d'équilibre de Nash et est sans doute le concept le plus utilisé pour décrire le comportement d'agents rationnels en situation d'interaction. L'attitude *philosophique* provoquée par la démonstration de l'existence d'un équilibre pour tous les jeux abordés par la théorie économique est remarquable :

«An existence result as two purposes. First, if we have a game that satisfies the hypothesis of the result then we know that there is some hope that our efforts to find an equilibrium will meet with success. Second, and more important, the existence of an equilibrium shows that the game is consistent with a steady state solution. Further, the existence of equilibria for a family of games allows us to study properties of these

⁷⁶ Nash, «The Bargaining Problem». 1950, p. 49.

⁷⁷ Le résultat présenté ici et une solution générale au problème de marchandage. cf. Nash, «Equilibrium Points in n-Person Games». 1950.

⁷⁸ cf. Bloch, Nash, John «The Bargaining Problem». 2002, p.378.

equilibria (by using, for example, « comparative static » techniques) without finding them explicitly and without taking the risk that we are studying the empty set⁷⁹.»

Ce passage est très instructif puisqu'il nous montre clairement les distinctions qui existent entre l'économie mathématique classique et l'économie calculable. Dans la prochaine section, nous analyserons en détail, à l'aide des outils de la théorie de la calculabilité, des exemples de jeux de complexité grandissante en espérant montrer que contrairement à l'opinion qui vient d'être présentée, il est possible d'établir l'existence d'un équilibre sans avoir d'espoir de le trouver. Avant de passer à la présentation détaillée des jeux qui amèneront ces résultats en économie calculable, regardons tout de suite un exemple de résultat qui limite la portée du théorème de Nash.

Dans son article *Undecidability of the existence of pure Nash equilibria*, Sofronidis établit le résultat suivant :

Theorem 1 : *There exists no algorithm which decides for each game in PCG_n whether it has a pure Nash equilibrium or not⁸⁰.*

Plus explicitement, le résultat de Sofronidis est le suivant : étant donné $n \in \mathbb{N}$, il n'existe pas d'algorithme qui permette de décider, pour chaque jeu, non coopératif à n joueurs, donné en forme stratégique et pour lequel les fonctions d'utilités sont partielles récursives⁸¹, s'il existe un équilibre de Nash en stratégies pures. Premièrement, il faut remarquer la différence dans l'objectif par rapport au travail de Nash. Nash a fourni un résultat général qui stipule que *tous les jeux* ont un équilibre. Ici, on se demande s'il est possible, en se restreignant à une certaine classe de jeux que l'on peut définir à l'aide des mathématiques récursives, d'identifier un algorithme permettant de décider de l'existence d'un équilibre. La classe de jeux est choisie pour modéliser un minimum de réaliste dans les capacités des joueurs :

«If in any economic situation, which is modeled as a non-cooperative multi-person game in strategic form with the economic agents as players, we take into consideration

⁷⁹ Osborne et Rubinstein, *A Course in Game Theory*. 1994, p. 19.

⁸⁰ Sofronidis, «Undecidability of the Existence of Pure Nash Equilibria». 2004, p. 425.

⁸¹ Une fonction partielle récursive est une fonction pouvant être calculée par un procédé mécanique (une machine de Turing); on pourrait faire l'usage du terme algorithme. Une fonction récursive (on voit parfois le terme fonction totale récursive) est une fonction partielle récursive qui est définie en tout point, ceci correspondrait à un algorithme qui produit un résultat pour toute entrée.

the computational abilities of the agents, then the corresponding game must be effectively playable⁸².»

La constatation est que si l'on désire inscrire dans la théorie des jeux des limites minimales quant aux capacités de calculs des agents, les jeux doivent être *effectivement jouables*⁸³. Or, le résultat montre que pour une vaste classe de jeux, il est impossible de décider si ces jeux ont une solution. Ainsi, le rôle phare que font jouer Osborne et Rubinstein au résultat de Nash est mis à mal. On ne peut être assuré de trouver un équilibre dans un jeu donné et l'on ne peut étudier les propriétés des équilibres d'une classe de jeu sans exhiber de tels équilibres ou sans donner un algorithme qui fournit une méthode de décision pour cette classe de jeu. Ce résultat est un exemple du type d'analyse produite par l'économie calculable. Dans la prochaine section, en commençant par un exemple détaillé puis en considérant une vaste classe de jeux, nous retrouverons des résultats similaires et plus généraux.

3 – Rabin : Une stratégie impossible.

La théorie des jeux est un terrain propice aux considérations de l'économie récursive. Étant donnée la nature des objets qu'elle décrit, le souci de la réalisation pratique de ses résultats est très fort. Dans cette deuxième section de notre chapitre consacré à cette théorie, nous allons étudier les résultats produits depuis 50 ans en économie calculable concernant les jeux économiques. Dans un premier pas, nous allons étudier en détail un jeu particulier qui nous permet de définir les concepts importants qui forment le contexte théorique de l'économie calculable. Dans un deuxième pas, toute la classe des jeux arithmétiques sera traduite dans le vocabulaire développé et des résultats généraux quant à cette classe seront présentés et analysés. Pour compléter la valse, nous changerons le point de vue de l'analyse pour développer une analyse de la complexité des jeux économiques en aboutissant finalement à des résultats aussi généraux que ceux présentés dans la section précédente.

⁸² Sofronidis, «Undecidability of the Existence of Pure Nash Equilibria». 2004, p. 428.

⁸³ Une définition détaillée et une analyse de ce concept seront le sujet principal de la prochaine section.

La première recherche s'intéressant au contenu calculable des jeux économiques remonte aux travaux de Michael O. Rabin, qui sont contemporains du développement de la théorie classique. Dans « *Effective Computability of Winning Strategies* », qui est le premier exemplaire des travaux que l'on pourrait regrouper sous l'ombre de l'Économie calculable, Rabin démontre l'existence d'un jeu particulier qui vient diminuer la confiance que l'on peut accorder à un des résultats les plus forts de la théorie des jeux.

«The question arises as to what extent the existence of winning strategies makes a win-lose game trivial to play: is it always possible to build a computer which will play the game and consistently win? Our main result is to answer this question in the negative. There are actual win-lose games which are strictly determined for which there is no effectively computable winning strategy. Intuitively our result means that there are games in which the player who in theory can always win, cannot do so in practice, because it is impossible to supply him with effective instructions regarding how he should play in order to win⁸⁴.»

L'analyse de Rabin a pour cadre un type particulier de jeux de deux joueurs et à somme nulle. La première étape de sa démonstration est de définir une notion mathématique de *jeu effectif*⁸⁵. Un jeu sera effectif, si toutes les clauses nécessaires à sa description et tous les objets impliqués dans son déroulement sont effectifs. Intuitivement, un jeu est effectif s'il peut être joué mécaniquement. Par exemple, on ne pourra accepter sous cette étiquette un jeu dont une partie peut être de longueur infinie. C'est dans ce nouveau contexte des jeux effectifs que Rabin tente de répondre à la question posée en ouverture.

3.1 – Win-Lose games, les jeux de Gale-Stewart

La discussion étant ici centrée sur un type de jeu que l'on appelle jeu de Gale-Stewart⁸⁶, voici la forme générale de ce type de jeu :

⁸⁴ Rabin, *Effective Computability of Winning Strategies*. 1957, p. 148.

⁸⁵ Traduction de *actual game*.

⁸⁶ Velupillai, *Computable Economics The Arne Ryde Memorial Lectures*. 2000, p. 131.

Un jeu de Gale-Stewart est un jeu $\Gamma = (x_0, X, X_I, X_{II}, f, S, S_I, S_{II})$ t.q.:

$$1^\circ x_0 \in X;$$

$$2^\circ X_I \cap X_{II} = \emptyset ; X_I \cup X_{II} = X;$$

$$3^\circ f : X - \{x_0\} \rightarrow X \text{ et } \forall x \in X \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } f^n(x) = x_0;$$

$$4^\circ \forall s \in S \text{ s} = \{s(0), s(1), \dots\} \text{ t.q. } s(0) = x_0 \text{ et } \forall i \text{ s}(i) = f(s(i+1));$$

$$5^\circ S_I \cap S_{II} = \emptyset \text{ et } S_I \cup S_{II} = S.$$

Dans cette formalisation, x_0 est la position initiale du jeu, X est l'ensemble des positions dans le jeu, X_I (respectivement X_{II}) est l'ensemble des positions pour lesquelles c'est au joueur I (respectivement au joueur II) de jouer, f est une *fonction* qui associe à chaque position, la position précédente dans le jeu (appelons cette fonction, *fonction prédécesseur*), S est l'ensemble des déroulements du jeu (des parties), S_I (respectivement S_{II}) est l'ensemble des déroulements pour lesquels c'est le joueur I (respectivement le joueur II) qui gagne. Les conditions 2° et 5° spécifient que l'ensemble des positions et l'ensemble des déroulements sont bien partitionnés entre les deux joueurs; les conditions 3° et 4° spécifient que la position initiale est un prédécesseur (pas nécessairement immédiat) de toutes les positions du jeu et que les déroulements du jeu débutent tous dans la position initiale et sont compatibles avec la fonction prédécesseur.

À partir de la formalisation des jeux de Gale-Stewart, on peut définir formellement ce que sont une stratégie, une stratégie gagnante et définir par la suite la notion de jeu déterminé. Une *stratégie* dans le jeu sera donnée par une fonction qui est, en quelques sortes, une « réciproque » de f . Alors que f calcule la position précédant une position donnée, la fonction qui définit une stratégie calcule la position suivant une position donnée. Cette fonction fixe pour un joueur, conformément au concept de stratégie établi par von Neumann et Morgenstern, un coup (déterminer la prochaine position) pour toutes les situations (positions du jeu) possibles. Dans le cas d'un jeu de Gale-Stewart, les situations possibles pour un joueur donné sont listées par X_I (X_{II}). L'ensemble $\Sigma_I(\Gamma)$ (respectivement $\Sigma_{II}(\Gamma)$) est défini comme l'ensemble des fonctions $\sigma : X_I \rightarrow X$ (respectivement $\tau : X_{II} \rightarrow X$) telles que $\forall x \in X_I \sigma(f(x)) = x$ (respectivement $\forall x \in X_{II} \tau(f(x)) = x$). Cet ensemble est l'ensemble des stratégies disponibles pour le joueur I (respectivement pour le joueur II). Un

couple de stratégies σ, τ t.q. $\sigma \in \Sigma_I(\Gamma)$ et $\tau \in \Sigma_{II}(\Gamma)$ définit un déroulement unique du jeu $s = \langle \sigma, \tau \rangle$. Effectivement, puisque les deux fonctions sont compatibles avec la fonction f les joueurs se retrouvent alternativement dans une position où c'est à leur tour de jouer, ils jouent à ce moment le coup prescrit par la stratégie adoptée.

Les stratégies ainsi définies, la description d'une *stratégie gagnante* devient particulièrement simple. σ est une stratégie gagnante si elle permet au joueur I de gagner peu importe les choix faits par le joueur II c'est-à-dire :

$$\sigma \text{ est une stratégie gagnante si } \forall \tau \in \Sigma_{II}(\Gamma), \langle \sigma, \tau \rangle \in S_I$$

Peu importe la stratégie τ choisie par le joueur II le déroulement $s = \langle \sigma, \tau \rangle$ permet au joueur I de gagner. Finalement, un jeu sera un *jeu déterminé* si l'un ou l'autre des joueurs dispose d'une stratégie gagnante. Effectivement, il est alors, en principe, impossible que l'issue du jeu diffère d'un déroulement à l'autre, le joueur disposant d'une stratégie gagnante pouvant faire face à toutes les stratégies possibles de son adversaire.

3.2 – Jeux effectifs

Du point de vue de la calculabilité, les jeux de Gale-Stewart ont de nombreuses lacunes, premièrement, rien ne restreint la longueur d'un déroulement du jeu qui peut donc être infinie. En fait, l'article original de Gale et Stewart intitulé « Infinite games of perfect information » ne s'intéresse qu'au cas des jeux infinis : « *In this paper we consider only the two-person zero sum case, but relax the condition of finiteness. Our first result shows that in this case the von Neumann theorem no longer holds and such games may be indeterminate*⁸⁷. » Effectivement, le résultat phare à ce moment est le théorème de von Neumann qui établit que *tous les jeux de somme nuls à deux joueurs sont déterminés*. Nous verrons que la première condition que Rabin impose pour définir une version *effective* de ce

⁸⁷ Gale et Stewart, *Infinite games of perfect information*. 1953, p. 245.

type de jeux est de se limiter au cas des jeux finis. De ce fait, la question de savoir quels jeux sont déterminés n'est plus vraiment pertinente, le théorème de von Neumann nous garantit qu'ils le sont tous. Cependant, la question à laquelle Rabin veut répondre prend tout son sens : *«The question arises as to what extent the existence of winning strategies makes a win-lose game trivial to play»*⁸⁸.» Autre lacune importante, les ensembles et les fonctions essentiels à la description du jeu ne sont pas nécessairement calculables. Rien ne garantit qu'il s'agisse d'ensembles rékursifs, ou de fonctions effectivement calculables.

La première étape pour répondre à la question de Rabin est de transformer la structure des jeux de Gale-Stewart pour les rendre effectifs : *«The main point is that these are actual games; there would be no sense in worrying about the effective computability of a strategy when the rules of the game in which it should be applied are not effective»*⁸⁹.» Les problèmes, qui pourraient survenir et que l'on souhaite éviter en transformant la structure de ces jeux pour les rendre effectifs, peuvent se voir en regardant la liste d'exigences suivantes proposées par Rabin et qui est certainement sensée si l'on considère le déroulement concret d'un jeu :

- a) Étant donnée une position $x \in X$, pouvoir établir le joueur dont c'est le tour;
- b) Étant donné un coup $x \rightarrow x'$, pouvoir établir si ce coup est légal, c'est-à-dire si $f(x') = x$;
- c) Étant donnée une position $x \in X$, pouvoir établir si cette position est terminale, si oui, pouvoir établir qui a gagné⁹⁰.

Ces exigences semblent raisonnables comme définition intuitive d'un jeu qui peut effectivement être joué. On peut même à l'intérieur de la théorie de la calculabilité, leur donner un contenu mathématique précis. Effectivement, pour déterminer, par exemple, quel joueur doit jouer, il faut savoir si $x \in X_I$ ou $x \in X_{II}$. Exiger que l'on puisse concrètement

⁸⁸ Rabin, *Effective Computability of Winning Strategies*. 1957, p. 148.

⁸⁹ Ibid., p. 148 note 3.

⁹⁰ cf. Ibid., p. 150

déterminer cette appartenance revient à exiger que les ensembles X_I et X_{II} soient rékursifs⁹¹, dans ce cas l'appartenance à ces ensembles est déterminable par une fonction effectivement calculable et il est toujours possible en pratique de calculer cette fonction pour résoudre le problème. En plus de ces conditions intuitives sur la possibilité pratique de jouer le jeu, Rabin présente un autre argument intuitif pour restreindre la taille de l'ensemble X des positions d'un jeu. Pour lui, l'impératif de communication qui existe entre les joueurs impose que les positions du jeu puissent être décrites. Or, un système de notation fixe ne pourrait jamais décrire une quantité non dénombrable de positions : «*Since any one notational system contains at most a countable number of different symbols we must impose the condition that the set X of positions of Σ is finite or countably infinite*»⁹².» Même si il y a quelque chose de convaincant dans cet argument il ne m'apparaît pas du tout décisif. Effectivement la description de toutes les positions *auxquelles les joueurs feront face* est sans doute possible même si l'ensemble de toutes les positions est non dénombrable et que l'on ne peut donc pas les décrire toutes. Par contre, l'argument présenté plus haut qui établit que X_I et X_{II} doivent être rékursifs me semble, lui, tout à fait convaincant. De plus, associé à la condition 2° de la définition d'un jeu de Gale-Stewart: $X_I \cap X_{II} = \emptyset$; $X_I \cup X_{II} = X$, cet argument oblige X à être lui-même rékursif, donc au maximum infini dénombrable. L'argument sur la notation peut donc être intéressant d'un point de vue intuitif, mais il n'est pas nécessaire.

Voici la traduction mathématique des exigences ci-dessus, qui constitue la définition d'un *jeu effectif* :

⁹¹ Un ensemble rékursif est un ensemble dont la fonction caractéristique est une fonction réursive. C'est-à-dire que la fonction est définie pour tout élément et on peut donc déterminer si un élément fait partie ou non de l'ensemble. La classe plus générale des ensembles récursivement énumérables, qui deviendra importante dans la discussion des résultats de Lewis, est constituée des ensembles dont la fonction caractéristique est une fonction partielle réursive. En pratique, il est toujours possible de déterminer qu'un élément de l'ensemble appartient à l'ensemble, mais il est possible d'être incapable de dire qu'un élément n'appartient pas à l'ensemble.

⁹² Rabin, *Effective Computability of Winning Strategies*. 1957, p. 150.

Un jeu $\Gamma = (x_0, X, X_I, X_{II}, f, S, S_I, S_{II})$ est un jeu effectif si:

- 6° tous les déroulements $s \in S$ sont de longueur finie;
- 7° X est fini ou infini dénombrable;
- 8° X_I et X_{II} sont des ensembles rékursifs;
- 9° $f : X - \{x_0\} \rightarrow X$ est une fonction effectivement calculable;
- 10° l'ensemble T est un sous-ensemble de X ,
c'est l'ensemble des positions terminales et il est rékursif;
- 11° T_I et T_{II} sont des sous-ensembles de T correspondant à S_I et S_{II} et ils sont rékursifs.

En restreignant de la sorte les hypothèses dans la définition d'un jeu de Gale-Stewart on s'assure que la définition et le déroulement d'un jeu sont effectifs. Ce *jeu effectif* peut maintenant être joué de manière tout à fait mécanique. Grâce à ces restrictions, on peut aussi utiliser la théorie des ensembles rékursifs pour tenter de comprendre si les stratégies gagnantes qui existent pour ces jeux sont elles aussi des fonctions calculables. On a déjà établi que les jeux dont on traite sont déterminés : un des joueurs possède une stratégie gagnante. Le but de Rabin est de montrer que malgré cela, il existe des jeux dans cette famille qui ne peuvent être systématiquement gagnés par le joueur possédant une stratégie gagnante, *même s'il sait qu'il peut gagner*. Pour obtenir ce résultat, Rabin décrit en détail un jeu particulier de la famille que nous venons de présenter.

3.3 – Le jeu de Rabin

Partant de la description d'un jeu de Gale-Stewart adaptée aux réquisits de la calculabilité, Rabin veut montrer que l'existence de stratégies gagnantes n'est pas une condition suffisante pour rendre un jeu trivial. Le contre-exemple qu'il propose est un jeu arithmétique qui se joue comme suit. Étant donnée g une fonction effectivement calculable dont le domaine est l'ensemble \mathbb{N} et l'image un sous-ensemble de \mathbb{N} , le joueur I choisit un entier i , en réponse le joueur II , qui connaît i , choisit un entier j , finalement le joueur I , qui connaît i et j , choisit un troisième entier k . Pour déterminer le gagnant, on calcul $g(k)$, si

$g(k) = i + j$ le joueur I gagne la partie, si $g(k) \neq i + j$ c'est le joueur II qui gagne. Il est aisé de constater que ce jeu satisfait aux conditions 1° à 11° énoncées plus haut c'est donc un jeu effectif déterminé. L'astuce pour produire le contre-exemple voulu est de bien choisir la fonction g .

Avant d'obtenir la démonstration du résultat, nous devons introduire un type d'ensemble particulier, les ensembles simples. La définition d'un ensemble simple, dont l'existence est démontrée par Post en 1944⁹³, est la suivante :

$G \subseteq \mathbb{N}$ est un ensemble simple si:

1° G est récursivement énumérable;

2° $\mathbb{N} - G$ (le complément de G dans \mathbb{N}) est infini et

ne contient pas de sous-ensembles infinis récursivement énumérables

Maintenant supposons que la fonction g qui définit le jeu Γ_g est une fonction qui énumère un ensemble simple c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs que prend la fonction g (son image) est un ensemble simple, disons $g : \mathbb{N} \rightarrow G$. Étant donné la définition d'un ensemble simple, le joueur II possède une stratégie gagnante. Effectivement, puisque $\mathbb{N} - G$ est infini il est toujours possible de trouver j tel que $i + j \notin G$, dans ce cas le joueur I est dans l'impossibilité de trouver $k \in \mathbb{N}$ t.q. $g(i + j) = k$. Rappelons qu'une stratégie est une fonction qui calcule à partir d'une position le coup du joueur, c'est-à-dire la position suivante. Le joueur II dispose d'une stratégie gagnante correspondant à une fonction, nommons cette fonction τ . Le fait que cette stratégie soit gagnante suggère que la fonction τ est telle que:

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad i + \tau(i) \notin G$$

c'est-à-dire que peu importe l'entier choisi par le joueur I la fonction τ permet au joueur II de calculer, à partir de cet entier, la réponse gagnante. Nous voudrions maintenant démontrer que la fonction τ n'est pas calculable. Supposons que la fonction τ est effectivement calculable. Dans ce cas, la fonction $h(i) = i + \tau(i)$ l'est aussi. L'image de h est donc un

⁹³ cf. Post, «Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems». 1944

ensemble récursivement énumérable, c'est aussi un ensemble infini puisque i peut prendre toutes les valeurs entières, de plus c'est un sous-ensemble de $\mathbb{N} - G$ par le choix de τ . Voici donc une contradiction, puisque G est un ensemble simple. Ainsi, pour le jeu Γ_g lorsque g énumère un ensemble simple, le joueur II a une stratégie gagnante, mais ne dispose pas de stratégie gagnante effectivement calculable. Il est donc dans une situation où il *sait* qu'il peut gagner à tout coup, mais *ne sait pas comment* jouer de manière à gagner certainement.

Cet exemple de Rabin ne remet pas en doute la *validité* des résultats mathématiques tels que les théorèmes de Zermelo-von Neumann ou de Gale et Stewart. Pourtant, il soulève un doute sur leur portée. Effectivement, il est vrai que plusieurs types de jeux effectifs sont déterminés, c'est-à-dire qu'un joueur rationnel peut gagner systématiquement. Par contre, pour au moins un type de jeux déterminés un joueur humain ou même une machine de Turing ne pourra jamais jouer de manière à gagner avec certitude. Puisqu'il nous convainc qu'il existe un jeu déterminé pour lequel il est impossible de jouer la stratégie gagnante, le contre-exemple de Rabin déplace efficacement la question de l'existence de stratégies gagnantes à l'existence de stratégies gagnantes récursivement énumérables, c'est-à-dire susceptibles d'être mises en application. Deux remarques à propos de cet exemple : la formulation du jeu de Rabin est assez simple et facile à comprendre, qui plus est la nature d'une stratégie gagnante est assez intuitive et elle aussi assez facile à comprendre. Puisque le joueur sait qu'il existe en principe une stratégie gagnante, mais qu'il est incapable de la mettre en pratique, cela montre que la possibilité de jouer une stratégie gagnante ne dépend, ni de son existence théorique ni de la connaissance de cette existence par le joueur, mais plutôt de sa capacité à *l'identifier*. Par contre, puisque cet exemple dépend d'un objet qui est plutôt obscur, un ensemble simple, il perd quelque peu de son réalisme. En effet, il établit que le type de jeu arithmétique Γ_g que l'on pourrait aisément jouer pour une grande classe de fonctions élémentaires n'admet pas de stratégie gagnante récursivement énumérable si l'ensemble G est un ensemble simple. Or, il semble assez improbable que ce genre de jeu soit joué!

Dans ce résultat comme dans plusieurs autres résultats de l'analyse récursive, on peut à première vue avoir un sentiment d'insatisfaction. Est-il vraiment pertinent de soulever que les jeux représentés par des fonctions énumérant des ensembles simples sont problématiques

puisque cette situation n'arrivera jamais? Il faut noter que même si cette situation n'est pas concrètement réaliste, le résultat mathématique qu'elle permet d'obtenir est tout à fait légitime. De plus, puisqu'elle s'appuie sur des hypothèses qui sont soucieuses d'un plus grand réalisme, par exemple on requiert que chaque jeu soit d'une longueur finie et que chaque jeu ait un nombre de déroulements qui est au plus infini dénombrable, la démonstration de ce résultat exhibe les limites d'un raisonnement issu de l'économie mathématique lorsque ses hypothèses sont plus restreintes. C'est dans ce contexte que les résultats étranges de l'analyse récursive sont atteints, en combinant une méthode traditionnelle de l'économie avec la traduction mathématique de postulats *minimaux* de réalisme. Les exigences de Rabin qui forment l'essence d'un jeu *effectif* sont certainement nécessaires à une mise en pratique d'un jeu. En outre, la plupart des résultats classiques ne se préoccupent pas du tout de pertinence. Par exemple, des résultats qui énoncent que *tous les jeux* de deux joueurs à somme nulle sont déterminés se placent dans un cadre définitionnel où la notion de jeu formel est très loin de se limiter aux jeux que l'on pourrait voir émerger de n'importe quelle situation concrète. En ce sens, dans sa recherche de résultats généraux, elle perd elle-même contact avec les situations qui pourraient émerger de tout effort de modélisation.

4 – Y a-t-il des jeux possibles? Décidabilité et complexité :

Le contre-exemple fourni par Rabin peut à lui seul nous convaincre de l'impasse dans laquelle se trouve la théorie classique des jeux. Par contre, on peut analyser un peu plus finement la nature de la difficulté à laquelle on doit faire face lorsqu'on désire jouer réellement les jeux de la théorie économique. Dans cette voie, les travaux d'Alain Lewis⁹⁴ sont déterminants. Débutons, tout de même plus humblement avec la présentation d'un argument de Kumaraswamy Velupillai⁹⁵ qui propose lui aussi une analyse récursive d'une

⁹⁴ Lewis, «On Effectively Computable Realizations of choice Functions». 1985

Lewis, «Lower bounds on degrees of game-theoretic structures». 1998

Lewis, «Some aspects of effectively constructive mathematics that are relevant to the foundations of neoclassical mathematical economics and the theory of games». 1992

⁹⁵ Velupillai, *Computable Economics The Arne Ryde Memorial Lectures*. 2000

portion de la théorie des jeux en se basant sur les travaux de Rabin et leur extension par Jones⁹⁶. Velupillai se penche sur ce problème plus de 40 ans après l'article fondateur de Rabin, aussi ses méthodes diffèrent sensiblement. Pour analyser le contenu récursif d'un jeu, il utilise les méthodes nées de l'étude des ensembles diophantiens dans les travaux menant à la résolution du 10^e problème de Hilbert. Rappelons ici la nature de ce problème qui a stimulé grandement les recherches en théorie de la calculabilité.

On donne une équation de Diophante à un nombre quelconque d'inconnues et à coefficients entiers rationnels : *on demande de trouver une méthode par laquelle, au moyen d'un nombre fini d'opérations, on pourra distinguer si l'équation est résoluble en nombres entiers rationnels*⁹⁷.

Une équation diophantienne est donc une équation algébrique pour laquelle les coefficients des variables sont des nombres entiers (respectivement rationnels). Lorsqu'on cherche à résoudre les équations diophantiennes, on cherche à trouver des nombres entiers (respectivement rationnels) qui rendent l'équation vraie. Le problème de Hilbert est d'identifier une méthode *générale* qui permettrait de *décider* si une équation diophantienne quelconque admet une solution ou non. Trois points importants sont à souligner, premièrement l'exigence de généralité est fondamentale, il ne suffit pas de trouver une méthode pour une équation particulière, même si cela peut-être mathématiquement intéressant, mais bien un algorithme fonctionnant pour toutes les équations de ce type. Deuxièmement, la restriction de l'ensemble de solutions possibles est non-négligeable, des méthodes de résolution qui fonctionnent dans le cas de solutions réelles ne sont pas applicables ici⁹⁸. Finalement, les méthodes itératives qui permettent une approximation aussi proche que voulu, mais qui demanderaient un nombre infini d'étapes pour fournir une solution exacte ne sont pas admissibles. Ce problème a tenu les logiciens et les mathématiciens au travail plusieurs décennies, c'est en 1970 que Iouri Matiassevitch achève

⁹⁶ Jones, «Three Universal Representations of Recursively Enumerable Sets». 1978

⁹⁷ Hilbert, *Sur les problèmes futurs des mathématiques les 23 problèmes*. 1900, p. 30. Je souligne.

⁹⁸ Pensons ici à la terreur de tous les écoliers: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ formule qui permet de trouver les solutions *réelles* des équations d'une variable, du second degré.

le corpus de travaux qui établissent la preuve de l'impossibilité de fournir la méthode demandée par Hilbert⁹⁹.

Dans l'article de Rabin, ce dernier transforme un jeu du type jeu de Gale-Stewart pour le rendre effectif, c'est-à-dire pour faire en sorte que les règles du jeu, le déroulement et les résultats soient tous soumis aux limites des fonctions calculables. Suite à cela, il montre que malgré la nature effective du jeu et de sa description, et malgré le fait qu'un théorème de la théorie des jeux garantisse l'existence d'une stratégie gagnante, le jeu n'est pas trivial. C'est-à-dire qu'il est impossible pour le joueur disposant d'une stratégie gagnante de l'utiliser, puisqu'elle n'est pas récursive. Par contre, la nature du jeu permettant d'obtenir ce résultat est assez précise et il y a peu de chance qu'elle reçoive une interprétation économique pertinente. Velupillai, quant à lui, s'attache à montrer qu'une vaste catégorie de jeux chers aux économistes peut être traduite par des jeux arithmétiques. Dans cette famille de jeux, il est assez aisé de retrouver les résultats de Rabin sur l'inexistence de stratégies calculables.

L'exercice dans lequel se lance Velupillai est de considérer différents jeux – *economic survival*, jeu de NIM, jeu du dollar d'argent – comme des jeux arithmétiques. Ces jeux ont en commun la caractéristique suivante, chaque partie peut être représentée par une formule du langage des prédicats. Pour ce faire, on associe au premier joueur le quantificateur existentiel (\exists) et au second joueur le quantificateur universel (\forall) un déroulement du jeu sera donc une formule alternant les deux quantificateurs et stipulant un polynôme dont la vérification détermine le gagnant :

$$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \dots \exists x_{k-1} \forall x_k P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_k) = 0$$

Si cette formule est vraie, le premier joueur gagne. Si cette formule est fausse, c'est le second joueur qui gagne. À partir de cette représentation, si on limite les formules à une longueur finie et le domaine des variables aux nombres rationnels, alors chaque déroulement d'un jeu

⁹⁹ Le parcours menant à la solution négative du problème est exposé ici : Matiasевич, *Le dixième problème de Hilbert : son indécidabilité*. 1995

Voir aussi : Robinson, «Existential definability in arithmetic» ; Davis, «Arithmetical problems and recursively enumerable predicates» ; Putnam, «An unsolvable problem in number theory» *ibid.* ; Davis, Putnam et Robinson, «The decision problem for exponential diophantine equations» .

devient une équation diophantienne. Ces conditions supplémentaires sont raisonnables dans le contexte de jeux devant effectivement être joués. Avec cette correspondance, on montre que ce problème consistant à trouver une méthode pour décider si un des joueurs a une stratégie gagnante effective et le 10^e problème de Hilbert sont de même nature. Évidemment, il faut pour cela pouvoir opérer cette représentation formelle du jeu. Velupillai liste quelques types de jeux, qui peuvent être analysés par le biais d'un jeu arithmétique équivalent, une fois qu'ils ont été rendus effectifs à la manière de Rabin :

«Finally, games of attrition, games of timing, tactical air-war games, and « parlour » games of skill such as chess and variants of poker can all be studied in the generic form, intuitively suggested in the above discussion. [...] In the next sections, in steps of increasing generality, a class of arithmetical games will be defined, discussed, and analyzed. Such games encompassed, as special cases, all of the above examples, when they are constrained computably in various ways. It is then possible to ask recursion-theoretic questions on the decidability, effective playability, and tractability of determined games¹⁰⁰.»

Les questions qui peuvent être soulevées lorsque les jeux formels sont rendus effectifs sont analogues aux questions que posait Turing par rapport aux programmes informatiques : est-ce possible de jouer à ce jeu? Est-ce possible de gagner systématiquement en jouant à ce jeu? Est-ce possible de trouver une méthode générale qui permettrait de répondre à ces deux questions pour un jeu arbitraire? L'approche de Velupillai se veut une exploration de ce genre de questionnement.

Le contre-exemple de Rabin réglait déjà la question de la possibilité de jouer certains jeux de Gale-Stewart, une fois rendus effectifs, et cette conclusion est donc directement transférable à la famille plus vaste de jeux arithmétiques. L'avantage de la méthode plus générale de Velupillai est double. Premièrement, en établissant une correspondance entre les jeux arithmétiques et les ensembles diophantiens on tranche la question de la décidabilité des jeux arithmétiques. Il n'est pas possible de trouver une méthode générale pour déterminer si un jeu arithmétique admet une stratégie gagnante effective pour l'un des joueurs. Or, les jeux *arithmétisables*, selon la méthode de Jones-Velupillai, correspondent à des jeux de deux joueurs traditionnellement importants pour la théorie économique et largement étudiés par la théorie des jeux. Par ailleurs, grâce aux outils développés pour d'autres classes de problèmes,

¹⁰⁰ Velupillai, *Computable Economics The Arne Ryde Memorial Lectures*. 2000, p. 116.

on peut aborder la question de la complexité. Précisément, la traduction d'un jeu en problème diophantien peut facilement se traduire elle-même en un problème de satisfaction d'une expression booléenne. Le problème SAT consiste à évaluer la possibilité de donner des valeurs aux variables d'une expression de la logique des propositions, de telle sorte que l'expression soit vraie. Lorsque toutes les variables sont liées par un quantificateur, on parle du problème QSAT. J'ai dit que les ensembles diophantiens pouvaient être mis en correspondance avec les expressions booléennes, sans en faire la démonstration ici, on voit déjà une forte analogie de forme entre la condition de victoire d'un jeu arithmétique et une formule booléenne quantifiée. Or, le problème de décision correspondant à la satisfaisabilité des expressions booléennes est de complexité connue :

«With this background, it is easy to see that all arithmetical games that I have discussed [...] have the QSAT [Quantified satisfiability] form and are hence PSPACE-complete. [...] This goes to show that, even through [sic] the games are determined in principle, i.e. Although the existence of winning strategy for one of the players is provable, they are in fact – even in relatively simple cases – intractable. In other words, these arithmetical games would require at least exponential time to determine which player has a winning strategy. This is preliminary to determining whether the winning strategy is recursive¹⁰¹!»

Ainsi, non seulement on a pu établir l'impossibilité de décider pour la classe des jeux arithmétiques si un des joueurs peut gagner systématiquement, mais on sait maintenant que même pour des instances particulières, les perspectives sont sombres, la taille du problème fait exploser la difficulté de trouver une réponse. Les problèmes de la classe PSACE, sont les problèmes pouvant être décidés par une machine de Turing avec un espace de travail polynomial par rapport à la taille du problème, mais en temps exponentiel par rapport à la taille du problème.

Dans cette vague de travaux sur la complexité algorithmique des problèmes qui émergent de la formulation classique de la théorie économique, Alain Lewis a produit de nombreux résultats. L'approche de Lewis se veut plus générale que celle de Velupillai. Évidemment, son analyse, tout comme celles de Rabin et de Velupillai, s'inscrit dans la tradition de l'étude des fonctions récursives et des ensembles récursifs. Par contre, elle fait partie d'une théorie plus générale de l'analyse récursive :

¹⁰¹ Ibid., p. 129.

«To quantify the precise meaning of the bounded complexity of an effective computation we use the notion of a recursive function on the positive integers and assume the praxeology associated with Church's thesis, which states informally that if a number-theoretic function is computable, then it is recursive. We very often weaken this notion of acceptable bounded complexity associated with effective constructions to R.E., where R.E. stands for recursively enumerable¹⁰².»

Lewis ne cherche pas à répondre d'abord à la question de la décidabilité des jeux économiques. Il s'intéresse plutôt directement à mesurer la difficulté associée à ces problèmes de décision en leur attribuant un rang dans une hiérarchie de complexité.

«With the precise notion of complexity embodied in the R.E. sets, however, one can measure the extent to which non-recursiveness occurs in many algorithms that are merely specified to be constructive in imprecise terms. Herein lies the most important advantage of our approach, namely the capability to measure containment and deviation from bounded instances of complexity in terms of the recursive functions of Gödel¹⁰³.»

Lewis va construire explicitement des structures ensemblistes qui sont des approximations récursives de plusieurs objets propres à la théorie économique, nommément les jeux de Gale-Stewart, les jeux de Banach-Mazur, une forme de jeu à un joueur qui correspond aux fonctions de choix rationnel, une forme de jeux qui correspond au modèle Walrasien d'équilibre général et finalement les jeux non coopératifs à N joueurs. Cette structure récursive *représente*¹⁰⁴ l'objet mathématique du jeu; or, étant donné sa nature, elle permet d'analyser la complexité de la tâche à accomplir. Cette analyse sera faite dans la théorie des degrés de Turing, qui sont un moyen d'ordonner¹⁰⁵ les ensembles selon leur plus ou moins grande insolvabilité. La première question à laquelle on pourra répondre, équivalant aux résultats présentés plus haut, est celle qui demande si une *représentation récursive* d'un jeu est *récursivement réalisable*.

¹⁰² Lewis, «Some aspects of effectively constructive mathematics that are relevant to the foundations of neoclassical mathematical economics and the theory of games». 1992, p.214; pour une définition d'un ensemble récursivement énumérable (R.E. set) voir la note 17.

¹⁰³ Ibid., p. 214.

¹⁰⁴ Ici, on utilise le terme technique de représentation utilisé par les mathématiciens.

¹⁰⁵ La notion d'ordre dont peut être munie la structure des degrés de Turing est un ordre partiel, les travaux qui ont été réalisés pour comprendre plus finement cette structure ont mis en évidence qu'elle est tous sauf simple!

«Given an arbitrary recursive presentation of a game-theoretic structure A_g [...] we ask whether or not A_g can be recursively realized. Then we say that A_g may be recursively realized we mean that the task of A_g can be executed by a Turing machine¹⁰⁶.»

La tâche associée à A_g est une certaine correspondance entre les données d'un problème et le résultat attendu : identifier une stratégie gagnante, faire un choix rationnel, déterminer un point d'équilibre. Évidemment, tous ces problèmes intéressants dont il est question ne sont pas récursivement réalisables, c'est ce que nous indiquaient déjà les travaux de Rabin. Or, grâce aux degrés de Turing associés à la tâche de chaque problème, on peut raffiner notre analyse. On peut constater que certains de ces problèmes sont qualitativement plus difficiles que d'autres. Si les jeux de Gale-Stewart sont déjà hors de portée des machines de Turing, on a vu que ce problème de décision était comparable au 10^e problème de Hilbert et donc de complexité comparable, les problèmes de décision des fonctions de choix sont déjà beaucoup plus complexes :

«What this means is that even if we had a machine or algorithm that could provide solutions to Hilbert's Tenth Problem, such a machine or algorithm would not come close to the uniform realization of recursively representable choice function in neoclassical mathematical economics¹⁰⁷.»

Si les tâches associées à certains jeux, qui sont utilisés pour démontrer des résultats purement mathématiques, la variante Γ_g d'un jeu de Gale-Stewart par exemple, sont impossibles à réaliser par une machine de Turing, il y a matière à s'interroger sur les méthodes mathématiques exploitées par ces jeux. Par contre, si des problèmes aussi fondamentaux que le choix rationnel, l'équilibre général ou les équilibres dans les jeux non coopératifs sont eux aussi hors du domaine de réalisation des machines de Turing, et de loin, c'est plus inquiétant. En effet, ces problèmes ont une portée théorique et pratique pour l'économie contemporaine et l'impossibilité de trouver des méthodes pour les résoudre doit au minimum stimuler la recherche d'alternatives réalisables.

¹⁰⁶ Lewis, «Lower bounds on degrees of game-theoretic structures». 1998, p. 2.

¹⁰⁷ Lewis, «Some aspects of effectively constructive mathematics that are relevant to the foundations of neoclassical mathematical economics and the theory of games». 1992, p. 220.

Les résultats de Lewis sont sans appel, les catégories conceptuelles de la théorie des jeux classiques ne peuvent être réalisées effectivement. Par contre, l'analyse de Lewis ouvre la porte à la production de résultats positifs en économie mathématique qui sont intrinsèquement effectifs. Les objets mathématiques qui ont été développés pour *représenter* les différents problèmes de la théorie des jeux forment un cadre théorique à l'intérieur duquel la recherche peut s'effectuer. Le cadre nécessaire pour représenter les fonctions de choix et les jeux non coopératifs est la notion de corps récursif¹⁰⁸, à l'intérieur de ce cadre il est possible d'exprimer les problèmes classiques de manière récursive et il est possible de démontrer que leur réalisation est impossible. Par contre, la porte est ouverte pour faire une théorie économique basée sur des structures plus simples que les corps récursifs :

«One way to interpret our results is to say that the notion of recursively presented field is too complex an algebraic object to serve as a framework for an effective theory of games.[...] Of course, if one simplifies the admissible algebraic structures upon which games are to be played, it becomes more difficult to obtain what we like to call 'good' results. Typically, the simpler a structure one deals with mathematically, the more complex the techniques employed to obtain deep results¹⁰⁹.»

Ainsi en utilisant des structures plus simples pour formuler les problèmes intéressants, il devient possible de les aborder avec des méthodes exclusivement récursives. Évidemment, les bons résultats auxquels fait référence Lewis – par exemple le théorème de Nash, le second théorème du bien-être ou l'existence d'un équilibre général dans une économie de production – dépendent tous de propriétés topologiques communes au corps des nombres réels et aux corps récursifs, mais qui disparaissent lorsqu'on affaiblit la structure. La comparaison entre la théorie des nombres et la théorie des fonctions d'une variable réelles représente très bien cette opposition, la structure topologiquement très riche des nombres réels permet de démontrer des résultats très puissants et très généraux quant aux fonctions d'une variable réelle, alors que les résultats en théorie des nombres sont beaucoup plus nombreux et beaucoup plus disparates. Dans cette théorie, chaque problème nécessite le développement de méthodes qui lui sont propres. Or, là est peut-être le prix de la calculabilité en économie :

¹⁰⁸ cf. Chapitre 1, §3.1.

¹⁰⁹ Lewis, «Some aspects of effectively constructive mathematics that are relevant to the foundations of neoclassical mathematical economics and the theory of games». 1992, p. 223-224.

«So our personal preference to obtain a fully effective theory of games is the approach of restricting effective constructions in the theory of games over decidable predicates of simpler algebraic structures than the recursively presented fields.[...] A very good beginning can be had with the study of Diophantine predicates over the ring of algebraic integers¹¹⁰.»

Les théorèmes pouvant être démontrés dans ce cadre sont tout de même importants, Lewis cite par exemple le théorème d'impossibilité de Arrow qui est fondamental en théorie du choix social. Il fournit aussi quelques exemples de mécanisme de Hurwicz – mécanismes d'allocation – qui sont récursivement réalisables. Alors que les résultats de Rabin et Velupillai étaient d'abord des résultats négatifs dont l'objectif était de remettre en question les résultats formels de la théorie économique en montrant qu'ils étaient non seulement impossibles en pratique, mais plus fondamentalement impossibles en théorie; les travaux de Lewis s'inscrivent dans une démarche positive qui vise à inventer une théorie économique récursive. Le prix de cette nouvelle théorie est d'abandonner les cadres formels qui permettent des résultats généraux au profit de cadres formels plus restreints qui limite d'emblée la complexité des résultats démontrables.

5 – Conclusion : l'axiomatique racine du problème?

Les résultats analysés dans ce chapitre, ceux de Sofronidis, Rabin, Velupillai et Lewis, sont tous des résultats tirés d'une forme d'analyse logique de la théorie des jeux. Dans cette analyse les principaux outils sont les fonctions récursives, les machines de Turing et quelques résultats phares de la logique mathématique: thèse de Church-Turing, théorème d'incomplétude, hiérarchie de complexité, etc. J'aimerais ici attirer l'attention sur le fait suivant. C'est sur la théorie des jeux en tant que théorie mathématique formelle, c'est-à-dire découlant d'une base axiomatique par l'application de règle de déduction, que portent les résultats d'impossibilités. Or il n'est pas anodin qu'il en soit ainsi. L'économie est à la base intéressée à décrire une réalité humaine, par contre la théorie elle-même fait un usage intensif des mathématiques : *«The idea is: we formulate our theories within the current standards of*

¹¹⁰ Ibid., p. 224.

*mathematical rigor, and then place everything inside axiomatic set theory*¹¹¹.» Ce faisant, le focus de la théorie est transféré des entités concrètes vers les objets formels, descriptions symboliques soumises à des règles formelles. Cette nouvelle réalité amène de nouveaux questionnements: *«Since economics and other areas in the social sciences are now heavily dependent on sophisticated mathematical tools, the limitations intrinsically inherent in those tools have to be investigated and pondered in their applications*¹¹².» C'est dans cette optique que nous devons considérer les résultats négatifs à propos de la calculabilité des résultats de la théorie des jeux.

*«[...]we show that when we see game theory as a formal axiomatized theory, some unsuspected incompleteness phenomena appear that establish limits to the external epistemological power of the theory of games. It should be stressed that analogous results could be obtained for any mathematized microeconomic theory – here game theory is used for being an archetypal example in economic theory*¹¹³.»

Les théories axiomatisées sont accompagnées de limites épistémologiques qui ne sont peut-être pas propres aux réalités qu'elles se proposent de décrire. Ainsi, la compréhension informelle du problème nous amène à percevoir une solution simple, essayons tous les cas puisqu'ils sont en nombres finis. Or, aussitôt qu'arrive la tâche de décrire ce nombre fini de situations d'une manière qui les rend manipulables par des outils mathématiques, les problèmes de calculabilité et de décidabilité que l'on a explorés reviennent en force. *«Formalized theories are about strings of symbols that purport to represent our intuitions about concrete objects. When we look at finite games within axiomatic theories, those naive intuitions about their solvability break down*¹¹⁴.» Ce que les résultats de l'analyse en terme de calculabilité nous indiquent c'est que l'avenir pour la théorie des jeux (et les autres théories économiques mathématisées) n'est peut-être pas si sombre. La voie pavée par la formalisation à l'aide des mathématiques classiques peut s'avérer un cul-de-sac, mais ce n'est sans doute pas la seule voie possible. *«Gödel-like incompleteness theorems are warning posts that indicate blocked routes; they mean that one cannot go farther along some direction in mathematical*

¹¹¹ da Costa et Doria, *Computing the future*. 2005, p. 19.

¹¹² Tsuji, da Costa et Doria, «The Incompleteness of Theories of Games». 1998, p. 533.

¹¹³ Ibid., p. 554.

¹¹⁴ Ibid., p. 555.

*theories*¹¹⁵.» Dans le prochain chapitre, nous explorerons des routes alternatives que peuvent emprunter les idées de l'économie calculable.

¹¹⁵ Ibid., p. 565.

CHAPITRE III

LA RATIONALITÉ LIMITÉE, UNE RATIONALITÉ CALCULABLE?

Dans les deux chapitres précédents, les théories économiques, du consommateur et des jeux, ont été analysées du point de vue de l'économie calculable. Cette analyse nous a montré que pour plusieurs classes de problèmes ayant reçu une réponse mathématique en théorie économique, il y a des incertitudes inévitables quant à la décidabilité des problèmes et quant à la réalisabilité des solutions fournies. Maintenant, il serait intéressant de prendre un peu de recul par rapport à ces résultats pour évaluer leur portée. Pour pouvoir mettre en évidence les failles inhérentes aux théories économiques, il a fallu étudier les conséquences de leur formalisation dans un langage mathématique particulier. C'est à partir de cette formalisation que les cas problématiques sont construits. Ce sont les limites de cette formalisation qui sont mises de l'avant par les arguments techniques. En effet, dans les cas pouvant être traités intuitivement sans langage formel, les résultats classiques paraissent tout à fait légitimes (du point de vue de la cohérence mathématique). Peut-être qu'une théorie économique qui s'abstiendrait de toute formalisation éviterait la critique des mathématiques récursives? Or, les résultats phares des théories classiques sont essentiellement formels. Ils n'ont pas d'existence tangible hors des théories axiomatiques qui permettent leur démonstration. Néanmoins, certains économistes sont restés prudents par rapport aux mathématiques en économie et ont produit des théories alternatives aux théories classiques. Velupillai présente constamment Herbert Simon comme un instigateur important de la tradition économique dans laquelle il s'inscrit. Comment les théories d'économistes comme

Herbert Simon s'accordent-elles avec les hypothèses de l'économie calculable? Est-ce que le lien naturel entre les mathématiques algorithmiques et le concept de processus dans la théorie de Simon existe au-delà de l'étiquette?

Les critiques provenant des théories de la calculabilité et des fonctions récursives sont passablement efficaces pour semer le doute sur la fiabilité des résultats mathématiques qui forment le cœur de l'économie classique. Par contre, elles sont peu efficaces quand vient le temps de produire une théorie alternative. En fait, elles n'ont pas encore démontré cette efficacité. Elles s'imposent donc, en quelque sorte, comme une famille de conditions nécessaires à l'expression d'une théorie économique formulée dans un langage mathématique formalisé. Peuvent-elles être, par elles-mêmes, suffisantes à l'élaboration de théories positives? Par ailleurs, les critères formels qu'elles imposent sont parallèles à des critères intuitifs sur la manière de construire la recherche scientifique. Ainsi elles peuvent éclairer le débat qui existe déjà entre les théories économiques mathématiques et d'autres modèles économiques.

Par ailleurs, ce que les arguments techniques développés dans les chapitres précédents nous indiquent clairement, c'est que le concept de rationalité préconisé par l'économie néo-classique est dans une impasse. Lorsque l'on s'applique à caractériser les capacités computationnelles des agents humains en choisissant comme modèle de calcul la machine de Turing, on remarque que le comportement d'optimisation est impossible pour l'agent isolé comme pour l'agent en situation d'interaction. Pourtant, malgré ces résultats négatifs, l'analyse par la théorie de la récursion se révèle très féconde. En caractérisant le comportement de l'agent économique comme une tâche de résolution de problème plutôt que comme une tâche d'optimisation d'une fonction de choix, cette analyse fournit un cadre nouveau pour comprendre la prise de décision, la théorie de la complexité. Trouver un concept de rationalité qui est compatible avec ce nouveau mode d'analyse du comportement de l'agent économique, un comportement de résolution de problème plutôt qu'un comportement d'optimisation, pourrait lancer la théorie de l'économie calculable sur un programme de recherche novateur et productif.

La première partie de ce chapitre sera consacrée à la présentation de la théorie de la rationalité limitée d'Herbert Simon. Cette théorie issue de ses travaux de recherche sur le

comportement des décideurs en contexte administratif a souvent été évoquée par Velupillai comme une source d'inspiration majeure de ces travaux. Par exemple :

«[...]I think a reader can see in what sense, and to what extent, computable economics, is an implementation of the great traditions of the behavioural economics research programme Herbert Simon initiated and developed throughout his rich and varied intellectual life¹¹⁶.»

Il est donc intéressant de se questionner sur la possibilité de fonder une théorie positive de l'économie calculable sur les concepts développés par Herbert Simon. Les concepts de rationalité limitée, de satisfaction¹¹⁷, d'information et d'adaptation sont au cœur de la théorie de Simon. Les différences qu'ils imposent sur la compréhension du choix économique seront analysées dans cette première partie.

Dans la deuxième partie du chapitre, j'exposerai le formalisme employé par l'économie calculable pour décrire mathématiquement ces concepts propres à la rationalité limitée, est-il possible de modéliser ce traitement nouveau de l'information et de la décision dans un cadre récursif? Peut-on intégrer les idées de Simon sur les limites des agents économiques dans un modèle formel de calcul? Telles sont les questions auxquelles tente de répondre Velupillai. Je vérifierai les prétentions de Velupillai de pouvoir formaliser adéquatement la rationalité limitée.

Finalement, en conclusion du chapitre, nous reviendrons sur la question soulevée en introduction : est-ce qu'un concept de rationalité alternatif, qui a pu être développé dans une théorie économique non mathématique, peut servir de tremplin à l'économie calculable pour développer un programme de recherche positif?

1 – L'économie comportementale classique : l'héritage de Herbert Simon.

1.1 – Une rationalité raisonnée.

¹¹⁶ Velupillai, *Computable foundations for economics* p.332

¹¹⁷ C'est le terme qui sera utilisé pour traduire le néologisme *satisficing* introduit par Simon. Ce mot n'a pas réellement de traduction fixée par l'usage, certains utilisent *seuil de satisfaction*, que je ne trouve pas convivial.

Le point de départ de la recherche d'Herbert Simon est de comprendre les comportements de décision de gestionnaires qui mène aux comportements des firmes. Cette étude, largement empirique, s'inspire du comportement réel des administrateurs. Pour intégrer ce comportement dans une théorie du choix, Simon doit abandonner le concept de choix rationnel de l'économie classique. C'est dans la conception psychologique de la rationalité que Simon va trouver les bases conceptuelles pour développer sa théorie de la rationalité limitée. Simon donne, dans un dictionnaire¹¹⁸ de sciences sociales en 1964, la définition suivante de la rationalité :

«1. *In a broad sense, rationality denotes a style of behaviour (A) that is appropriate to the achievement of given goals, (B) within the limits imposed by given conditions and constraints*¹¹⁹.»

Cette définition très large de la rationalité se clarifie lorsque les éléments (A) et (B) sont caractérisés. Dans la suite de sa définition de la rationalité, Simon fait bien la distinction entre deux compréhensions de ce terme que l'on obtient en définissant ces deux éléments. La première, qui est commune à l'économie et à la sociologie, interprète la rationalité comme une caractéristique de l'action qui permet d'atteindre un résultat particulier : maximisation de l'utilité dans le cas de l'économie et promotion des objectifs de l'organisation dans le cas de la sociologie. La seconde appartient à la psychologie, à la logique et à l'éthique : une action est alors considérée comme rationnelle si elle est issue d'un processus de choix dérivé d'une faculté cognitive. Ces oppositions entre les définitions économique et psychologique du concept de rationalité sont la pierre d'assise de la théorie de la rationalité limitée.

Dans son article *From substantive to procedural rationality* Herbert Simon approfondit la distinction entre deux types de rationalité : la rationalité substantielle et la rationalité procédurale. Le premier est habituellement utilisé par les économistes pour fonder les concepts théoriques de l'économie. La définition de l'agent économique, la maximisation de l'utilité ou encore la prise de décision en théorie des jeux sont toutes issues de cette définition de la rationalité. Le deuxième concept, d'abord proposé par la psychologie et récupéré ensuite par l'approche comportementale en économie, met l'accent sur le processus menant à

¹¹⁸ Gould et Kolb, *A dictionary of the social sciences*. 1964, reproduit dans : Simon, *Models of bounded rationality*. 1982

¹¹⁹ Simon, *Models of bounded rationality*. 1982, p.405

une action jugée rationnelle. Plus spécifiquement, pour l'économie classique, c'est l'optimalité de l'action choisie qui rend un choix rationnel. Par ailleurs, pour la psychologie et l'économie comportementale, ce qui rend un choix rationnel c'est le processus qui mène à ce choix.

On peut éclairer la distinction entre la rationalité optimisatrice substantielle, propre à l'économie et la rationalité limitée procédurale, propre à la psychologie en regardant de quelle manière elles satisfont la définition de ce que doit être une action rationnelle selon le philosophe Jon Elster :

«An action, to be rational, must be the final result of three optimal decisions. First, it must be the best means of realizing a person's desire, given his beliefs. Next, these beliefs must themselves be optimal, given the evidence available to him. Finally, the person must collect an optimal amount of evidence – neither too much nor too little. That amount depends both on his desires – on the importance he attaches to the decision – and on his beliefs about the cost and benefits of gathering more information¹²⁰.»

Dans cette présentation des critères d'identification du comportement rationnel, Elster distingue trois moments d'une action rationnelle. Chacun de ces moments est caractérisé par l'optimalité d'une des composantes de l'action. Dans le contexte de la rationalité économique, seul le premier élément de cette définition, l'optimalité du résultat, est pertinent. En effet, l'ordre transitif sur les préférences de l'agent implique que ses croyances sont systématiquement optimales et l'information complète dont il dispose par rapport au contexte de sa décision rend obsolète toute démarche d'acquisition de l'information. Ainsi, la définition substantielle de la rationalité satisfait trivialement la définition d'Elster. Par contre, dans le contexte de la rationalité limitée, chacune de ces trois étapes est analysée : la capacité de l'agent à arriver à une décision optimale n'est pas supposée, mais elle est analysée; les croyances de l'agent dépendent de manière non triviale de l'information dont il dispose; l'information concernant ce qui est donné n'est plus supposée, mais il faut proposer un mécanisme d'apprentissage. Par ailleurs, comme nous le verrons plus tard, l'optimalité de chacune des trois composantes de l'action doit être abandonnée au profit d'un critère plus réaliste de satisfaction. Ainsi, la définition procédurale de la rationalité n'évite aucun des

¹²⁰ Elster, *Nuts and bolts for the social sciences*. 1989. p.30

trois moments de la définition d'Elster, mais diverge sur la nature du critère de rationalité. Plutôt que de soutenir qu'une action rationnelle doit être le résultat de trois *décisions optimales*, l'économie comportementale classique défend le point de vue selon lequel une décision rationnelle est le résultat de *procédures réfléchies*¹²¹.

Pour terminer cette présentation des différences entre les théories substantielle et procédurale de la rationalité, regardons un exemple tiré de l'entrée *Bounded Rationality* qu'Herbert Simon a écrite pour le dictionnaire *The New Palgrave : A Dictionary of Economics*¹²². Dans cette entrée, Simon décortique trois façons de relaxer les hypothèses de la théorie de l'utilité espérée subjective (UES dans la suite) pour les rendre compatibles avec une théorie procédurale de la rationalité. L'UES est une théorie qui postule que les choix sont faits : (1) parmi un ensemble *donné* d'alternatives; (2) avec une distribution de probabilité connue quant aux résultats de chaque alternative; et (3) dans le but de maximiser l'utilité espérée. Ces trois hypothèses sont tout à fait compatibles avec la définition substantielle d'un choix rationnel. À quoi ressemblerait une théorie comportementale de l'UES? Tout d'abord, il faudrait explorer les mécanismes permettant de générer les alternatives plutôt que d'admettre d'emblée un ensemble donné d'alternatives. Ensuite, il faudrait rechercher les limites cognitives qui s'imposent dans l'évaluation des conséquences du choix tant en ce qui concerne les probabilités à associer aux résultats possibles, qu'en ce qui concerne l'utilité des résultats possibles. Ces limites cognitives doivent prendre en compte au moins deux phénomènes : les facultés limitées, d'un point de vue computationnel, d'un être humain pour prévoir les événements futurs, mais aussi les limites empiriques de ses connaissances sur le monde. Finalement, il faudrait proposer un principe de choix basé sur la satisfaction plutôt que sur la maximisation.

En étudiant comment le temps passé à prendre une décision est réparti parmi la recherche d'actions possibles, l'évaluation des conséquences de ces actions et le choix d'une action parmi celles considérées, la recherche en psychologie¹²³ est arrivée à la conclusion que la recherche d'actions possibles et l'évaluation de leurs conséquences forment l'essentiel du

¹²¹ Simon, *Models of bounded rationality*. 1982. p.406 ; «Rationality sometimes refers to process of choice that employ the intellectual faculty...»

¹²² Cette définition est reproduite dans Simon, *Models of bounded rationality*. 1982. p.291

¹²³ Simon, *Models of bounded rationality*. 1982, p.291

processus de résolution de problème. Or, puisque pour l'UES la nature rationnelle de la décision ne tient qu'au résultat de cette décision, cette dernière ne tient pas compte de ces activités dans son modèle du choix rationnel. Notons, par ailleurs, que si les alternatives ne sont pas *données*, il est impossible, en général, de générer *toutes* les alternatives possibles. Le comportement observé empiriquement n'est donc pas l'exploration systématique de toutes les alternatives, mais bien une exploration heuristique de quelques alternatives. Aussi, plutôt que de prendre l'optimalité comme critère de choix, la théorie de la rationalité limitée veut fournir des critères de choix compatibles avec les capacités cognitives de l'agent humain. En effet, la théorie de la maximisation impose une tâche computationnelle trop grande pour être réaliste.¹²⁴

1.2 – Les motivations d'une révolution

Nous venons de voir dans la section précédente les différences fondamentales entre la définition économique de la rationalité et la définition psychologique. J'aimerais ici préciser les motivations d'Herbert Simon à construire une théorie *économique* sur la définition psychologique de la rationalité. Le principal reproche qu'Herbert Simon fait à l'économie classique est son manque de souci pour les faits empiriques :

«At both macro and micro levels, evidence for the facts that would be required to give credence to neoclassical theory was mostly absent. The theory, on examination, required large numbers of auxiliary assumptions that were usually introduced a priori without substantial empirical support. There were other weaknesses, but these were the most striking. I have continued to try to understand the reasons for the reluctance of the profession to undertake the empirical research that would be needed to modify neoclassical theory in the directions of reality – and to see how that reluctance could be countered»¹²⁵.

¹²⁴ Nous avons vu dans le premier chapitre que cette impossibilité computationnelle n'est pas seulement liée à des considérations pratiques sur la *vitesse* de calcul, mais qu'elle est intimement liée au modèle mathématique lui-même. Dans ce cas, on peut même démontrer que *n'importe quel paradigme de calcul* échouerait, dans un cas non-trivial, à maximiser l'utilité.

¹²⁵ Simon, *Models of bounded rationality*. 1997, p.269

Déjà dans ses travaux de recherche doctorale, où il s'intéresse au comportement des administrateurs, Simon utilise une démarche résolument empirique en délaissant les méthodes habituelles de l'économie classique pour examiner les actions de gestionnaires humains. Par ailleurs, plusieurs économistes¹²⁶ ont soutenu que les bases empiriques de l'économie classique n'étaient pas importantes dans l'évaluation de la discipline, ce qui importe étant les résultats prédictifs de la théorie. À ce sujet, Simon a souvent décrié les thèses de Milton Friedman en soutenant que si les économistes négligent les preuves que leurs hypothèses sont empiriquement fausses en se fiant à la validité des conclusions qu'ils tirent de leurs théories, ils s'exposent à de graves erreurs si la structure de l'environnement se modifie puisque ce sont les hypothèses de leurs théories qu'il faudrait modifier¹²⁷. De plus, dans *Rationality as a Process and as Product of Thought*, Simon explore quelques résultats en économie classique pour montrer qu'ils sont compatibles avec plusieurs descriptions de la rationalité. En fait, il soutient que le comportement maximisateur, supposé par le concept de rationalité substantielle, est une instance d'un principe explicatif plus large et commun à plusieurs sciences sociales. Ce principe est le principe fonctionnaliste : les comportements observés, des individus ou des institutions, sont expliqués par les fonctions qu'ils remplissent. «*Functional arguments are arguments about the movements of systems toward stable self-maintaining equilibria*¹²⁸.» Avec cette définition d'un argument fonctionnaliste, les choix rationnels dans le sens de l'économie classique, sont des choix fonctionnels. Or, pour Simon, ce n'est pas l'appareil théorique composé du principe de rationalité ou de la théorie mathématique qui rend l'explication satisfaisante, mais l'argument fonctionnaliste qui est sous-jacent dans l'explication.

«*It is quite unclear what is gained by dressing [the argument] in the garbs of marginalism. [...] Economics tends to emphasise a particular form of rationality – maximizing behaviour – as its preferred engine of explanation, but the differences are often differences in vocabulary rather than in substance*¹²⁹.»

Malgré ce que cette dernière citation peut laisser croire, Simon n'est pas pessimiste face à la possibilité de formaliser mathématiquement les théories économiques. Dans son article *Some*

¹²⁶ Milton Friedman et Gary Becker pour n'en nommer que deux.

¹²⁷ Cf Simon, *Models of bounded rationality*. 1982, p.205

¹²⁸ Simon, «*Rationality as Process and as Product of Thought*». 1978, p.4

¹²⁹ Ibid., p.4 puis p.5

*Strategic Considerations in the Construction of Social Science Models*¹³⁰, Simon emploie des pistes de recherche pour la production de modèles mathématiques pour les sciences sociales. À cette occasion, il souligne l'importance des modèles mathématiques en économie :

«The most important of these is economics, where, to cite one example from many, the attempt to construct mathematical models of utility theory has rubbed off a great deal of fuzziness from the concept of "rational behaviour," and has laid bare some of the basic methodological problems in the operational definition and measurement of "utility"¹³¹.»

Ainsi, l'utilisation des mathématiques en économie n'est pas intrinsèquement problématique. Par ailleurs, il ne faut pas se laisser mystifier par l'outil au prix de perdre de vue l'objectif de la recherche et la validité des concepts théoriques sous-jacents aux modèles mathématiques. Ce qui est fondamentalement problématique pour Simon, ce sont ces bases théoriques. En effet, selon lui l'économie classique ne peut décrire adéquatement le comportement de l'agent économique parce qu'elle ne s'intéresse qu'à décrire les caractéristiques formelles d'un environnement qui permet un choix optimal et pas à décrire les caractéristiques empiriques de l'environnement de choix réel de l'agent. Elle ne cherche pas à décrire les buts ou les valeurs de l'agent, elle postule une cohérence globale du comportement de choix et une identité entre *le monde* objectif et la représentation qu'en a l'agent¹³². Selon Simon, l'économie comportementale devrait plutôt chercher à décrire les processus qui régissent chacun de ces trois éléments : les processus de formation des buts et des valeurs; les processus de sélections des éléments portés à l'attention, qui seront les *données* permettant la prise de décision; et les processus de recherche d'informations. L'utilisation des mathématiques sans cette recherche préalable serait stérile : *«Mathematical social science is, first and foremost, social science. If it is bad social science (i.e., empirically false), the fact that it is good mathematics (i.e., logically consistent) should provide little comfort.*¹³³» Simon soutient que la transition d'une théorie substantielle de la rationalité à une théorie procédurale de la rationalité devra se faire à l'aide d'un changement profond dans le style du raisonnement et de la méthode scientifiques. Les outils essentiellement déductifs qui servent

¹³⁰ Paru dans Lazarsfeld, *Mathematical thinking in the social sciences*. 1955, reproduit dans Simon, *Models of bounded rationality*. 1982

¹³¹ Simon, *Models of bounded rationality*. 1982, p.211

¹³² Cf Simon, *Models of bounded rationality*. 1997, 368

¹³³ Simon, *Models of bounded rationality*. 1982, p.209

à dériver une théorie complète de quelques axiomes seront remplacés par une approche procédurale de résolution des problèmes empiriques soulevés par le champ d'études :

«The shift from theories of substantive rationality to theories of procedural rationality requires a basic shift in scientific style, from an emphasis on deductive reasoning within a tight system of axioms to an emphasis on detailed empirical exploration of complex algorithms of thought. Undoubtedly the uncongeniality of the latter style to economists has slowed the transition, and accounts in part for the very limited success of economic behavioralism in the past¹³⁴.»

Il est intéressant de noter que l'approche procédurale est déjà intégrée par Simon dans un cadre algorithmique. Comme on le verra plus loin, l'approche algorithmique permet de quantifier les coûts et les gains de ces procédures qu'il faut comprendre et implémenter.

1.3 – Composantes de la rationalité limitée : apprentissage, satisfaction, adaptation.

L'objectif de Simon dans son développement de la rationalité limitée est de fournir un cadre théorique à l'approche procédurale qu'il préconise :

«Broadly stated, the task is to replace the global rationality of economic man with a kind of rational behavior that is compatible with the access to information and the computational capacities that are actually possessed by organisms, including man, in the kinds of environments in which such organisms exist.¹³⁵»

Simon se propose donc de fournir un concept de rationalité alternatif qui devrait répondre à plusieurs critiques issues de la théorie de la firme. Ce concept abandonne l'idée classique de rationalité économique pour lui substituer une analyse plus fine des capacités cognitives de l'agent économique et du rôle de l'environnement dans lequel il évolue. Pour construire un nouveau modèle de comportement rationnel, il est important de déterminer quelles variables sont sous le contrôle de l'agent et quelles variables sont une donnée pour lui. Par ailleurs, il y a une zone floue entre ce qui est donné *sans effort* et ce qui est donné après une *enquête*. La notion d'information joue ici un rôle essentiel. La nature de l'information et la nature de la relation d'accès à l'information – est-elle immédiatement disponible ou doit-elle être acquise par l'apprentissage – seront des contraintes importantes. De plus, les variables données

¹³⁴ Ibid. p. 442

¹³⁵ Ibid. p. 239

peuvent aussi être distinguées en deux catégories : variables externes et variables internes à l'agent. Les capacités physiques et psychologiques de l'agent sont un exemple de variables données internes, qui sont importantes dans l'analyse de la rationalité de l'agent. L'analyse des capacités cognitives ou computationnelles de l'agent est donc fondamentale.

La première étape de cette conceptualisation est de comprendre comment l'agent économique découvre ou génère les différentes actions parmi lesquelles il devra choisir. Cette première étape correspond donc à modéliser une forme d'apprentissage, c'est-à-dire la possibilité d'acquérir de l'information. Notons au passage que plusieurs études menées sur le sujet montrent que les êtres humains qui doivent prendre des décisions en situation d'incertitude ne respectent généralement pas ce principe de *rationalité économique* en ce sens qu'ils prennent une décision avant d'avoir examiné toutes les alternatives disponibles au choix. Ils se comportent de la sorte parce que pour examiner toutes les alternatives, ils doivent d'abord découvrir l'information sur l'ensemble d'alternatives qui s'offre à eux¹³⁶. Dans la prise de décision, un facteur important est donc l'information disponible à l'agent qui prend la décision. Il faut distinguer entre deux types de contexte de décision : d'une part, la situation objective comme la verrait un être omniscient; d'autre part l'information subjective dont dispose effectivement l'agent. Même lorsqu'un ensemble défini d'alternatives est offert au choix, bien comprendre les mécanismes de recherche d'informations peut devenir crucial. Dans certaines situations, il est très difficile pour un agent humain de maximiser son utilité puisque la possibilité pratique de comparer les alternatives est mise à mal. Voici trois exemples où le choix entre des alternatives fixées peut s'avérer difficile : lorsque le choix est incertain, c'est-à-dire que la situation future n'est pas déterminée par le choix et que chaque alternative peut être favorable dans un scénario, mais défavorable dans un autre; lorsqu'il faut intégrer les choix de plusieurs personnes où le gain d'une personne est une perte pour une autre; finalement, lorsque l'avantage procuré par une alternative dépend d'une valeur morale, mais que cette alternative produit un désavantage selon une autre valeur morale. Ces trois cas montrent des situations d'incommensurabilité entre les alternatives qui rend l'optimisation très difficile. Pourquoi la recherche d'informations devient-elle si importante dans ces situations? Dans ce genre de situations, le comportement de choix *observé* est souvent de

¹³⁶ Cf Simon, *Models of bounded rationality*. 1997, p.286

refuser de prendre une décision et d'amorcer une recherche pour trouver une autre alternative qui contournerait la source de l'incertitude, du conflit d'intérêts ou du conflit de valeurs¹³⁷.

Pour décrire les méthodes de recherche d'informations, Simon va puiser dans la recherche en psychologie et en sciences cognitives :

«Today, we have a considerable body of theory, produced by research in cognitive science, that tells us how new alternatives, new designs, are discovered. [...]The cognitive theory shows that new alternatives are discovered by heuristics search through problem space¹³⁸.»

Une recherche compatible avec l'économie comportementale a donc une forte composante algorithmique. Cette composante est caractérisée comme l'exploration d'un espace de recherche, car une heuristique est comprise comme un ensemble de règles de décision servant à l'exploration non-systématique, mais efficace de cet espace. Pour donner un exemple de cette approche, Simon présente le cas de joueurs d'échec : dans une situation typique de milieu de partie, un joueur d'échec qui voudrait évaluer tous les déroulements possibles pour les 16 prochains coups (8 pour chacun des joueurs) aurait à évaluer un espace de recherche comptant 10^{24} alternatives. Cette tâche est évidemment impossible. Une heuristique de recherche d'informations efficace pourrait alors ressembler à ceci : le joueur classe les différentes positions évaluées dans quelques catégories comme « blanc gagne certainement », « noir gagne certainement », « clairement une nulle », « blanc ou noir gagne », etc. Ensuite, il se restreint à n'explorer que des positions où les coups successifs appartiennent tous à la bonne classe, par exemple « blanc gagne certainement ». Ce faisant, la taille de l'espace de recherche devient gérable : Simon a trouvé empiriquement des tailles d'espace de recherche de l'ordre de 100 positions¹³⁹. Il s'agit d'une simplification de la tâche assez incroyable. L'hypothèse optimisatrice qui suppose que toutes les alternatives sont données, nous paraît ici clairement absurde. Pour sa part, le processus de découverte de l'information permet d'aborder le problème.

Face à cette critique de la nécessité d'intégrer la recherche d'informations à la théorie du choix rationnel, l'économie classique a proposé d'intégrer le calcul du coût de l'information

¹³⁷ Ibid. p. 297

¹³⁸ Ibid. p. 322

¹³⁹ Simon, *Models of bounded rationality*. 1982, p.247

dans le problème d'optimisation correspondant à la prise de décision. Simon est d'avis que cette approche, plutôt que d'offrir une solution, dédouble les problèmes computationnels liés au problème du choix :

«Nor is it sufficient to construct a theory of perfect rationality, and then to annex to it some modifications to take account of search behaviour or response to uncertainty. As we shall see, introducing a neoclassical theory of search, like Stigler's (1961), simply compounds the computational problems; while handling uncertainty with rational expectations is a way of pretending that the problems aren't there. Economic theory needs to incorporate computational considerations from the very beginning, not as an add-on or amendment to a theory of omniscient rationality¹⁴⁰.»

On constate donc que la notion d'apprentissage, représentée par la recherche d'informations, est intimement liée à la deuxième étape de la conceptualisation de la rationalité limitée qui est de se représenter les limites computationnelles de l'agent économique. *«As economics moves out toward situations of increasing cognitive complexity, it becomes increasingly concerned with the ability of actors to cope with the complexity, and hence with the procedural aspects of rationality.¹⁴¹»* Simon soulève qu'une des différences entre les *modèles globaux* de choix rationnel et le comportement réel des êtres humains, est la nature du mécanisme d'évaluation des alternatives. Alors que les modèles globaux supposent que l'agent évalue toutes les alternatives grâce à la fonction d'utilité, l'optimisation de cette fonction pouvant presque être considérée comme une évaluation *simultanée* de toutes les alternatives, l'être humain examine les alternatives de manière séquentielle. Dans ce type d'analyse séquentielle, l'exigence de l'économie classique d'évaluer toutes les alternatives est trop coûteuse. Le processus d'analyse peut alors ne pas s'arrêter ou ne s'arrêter qu'après un temps trop long. L'outil technique utilisé par l'économie comportementale pour comprendre les processus cognitifs de l'agent humain est l'heuristique. Une caractéristique des heuristiques¹⁴² est de contenir un critère d'arrêt de la recherche. Ceci est fondamental

¹⁴⁰ Simon, *Models of bounded rationality*. 1997, p.320

¹⁴¹ Simon, *Models of bounded rationality*. 1982, p.453

¹⁴² Gerd Gigerenzer a fait beaucoup de travail dans la recherche d'heuristiques efficaces, voici les caractéristiques qui définissent selon lui les heuristiques *fast and frugal* :

- Elles sont séquentielles;
- Elles effectuent une recherche limitée, c'est-à-dire qu'elles sont dotées d'une règle d'arrêt simple;
- Elles prennent des décisions basées sur un seul critère;
- Elles savent exploiter le manque d'information;

puisque : d'une part, il est généralement impossible d'épuiser toutes les alternatives possibles; d'autre part, il est fort peu probable de reconnaître comme telle l'alternative optimale avant d'avoir exploré toutes les alternatives. En fixant un critère d'arrêt de la recherche, on garantit tout de même une prise de décision. Un exemple donné par Simon est, ici encore, celui d'un joueur d'échec. Dans son exploration des coups possibles, si un joueur d'échec découvre un coup qui permet de mettre l'adversaire en position d'échec et mat, il peut arrêter la recherche, toute évaluation supplémentaire étant devenue superflue.

L'option retenue par Simon est de remplacer le critère d'optimalité par un critère de satisfaction. Lorsqu'une alternative satisfaisante se présente, la recherche cesse et la décision est prise. Simon a utilisé, pour cette mécanique, le terme *satisficing*¹⁴³. Le critère proposé par Simon pour mettre en application le concept de satisfaction est celui de seuil d'aspiration qui est tiré de la psychologie. Un seuil est fixé par l'agent et ce seuil sera révisé à la hausse ou à la baisse suivant la facilité ou la difficulté avec laquelle il est atteint. Ce processus converge vers une solution satisfaisante pour l'agent qui demande un certain effort, mais ne dépasse jamais ses capacités. Si l'on combine l'évaluation séquentielle à un critère de choix formulé en termes de niveau d'aspiration, il apparaît que l'alternative choisie sera la première à rencontrer le niveau de satisfaction prédéterminé.

En utilisant cette procédure, il est possible de réduire considérablement la complexité d'un problème de choix. Si l'on affaiblit les critères utilisés pour identifier une solution à un problème, par exemple en cherchant une approximation suffisante d'un optimum plutôt que la *meilleure* solution, il est possible de trouver des problèmes où la complexité est significativement diminuée – c'est-à-dire on peut passer d'une complexité exponentielle à une complexité polynomiale. Précisément, les recherches heuristiques basées sur le critère de la satisfaction peuvent être très efficaces dans cette optique. La reconnaissance de *patterns* dans la structure des données peut aussi rendre la tâche de la recherche d'une solution algorithmiquement simple. Voici un exemple simple, mais lumineux pour illustrer ce phénomène :

-Elles savent exploiter la structure de l'information.

Gigerenzer, «Bounded rationality models of fast and frugal inference». 1997, p.207

¹⁴³ Voir la note 2.

«The example has been given of searching for a needle in a haystack. Given a probability density distribution of needles of varying degrees of sharpness throughout the haystack, searching for the sharpest needle may require effort proportional to the size of the haystack. The task of searching for a needle sharp enough to sew with requires an effort that depends only on the density of needles of the requisite sharpness, and not at all on the size of the stack. The attractiveness of the satisficing criterion derives from this independence of search cost from the size and complexity of the choice situation¹⁴⁴.»

Cet exemple est très éclairant. La satisfaction d'un critère qui ne dépend pas de la comparaison des différentes solutions entre elles, permet de stopper rapidement la recherche. Dès qu'une solution est *assez bonne*, on arrête la recherche et la décision est prise. Nul besoin de trouver *la meilleure* solution.

«The significance of these findings and conjectures is in showing that computational difficulties, and the need to approximate, are not just a minor annoying feature of our world to be dealt with by manufacturing larger computers or breeding smarter people. Complexity is deep in the nature of things, and discovering tolerable approximation procedures and heuristics that permit huge spaces to be searched very selectively lies at the heart of intelligence, whether human or artificial¹⁴⁵.»

On entrevoit ici comment l'économie calculable pourra trouver un concept propice à son développement dans la rationalité limitée. Le message martelé dans les chapitres précédents et que la formalisation à l'aide de la théorie de la calculabilité a aidé à mettre en évidence, est que la complexité est intimement liée aux problèmes de choix et pas seulement à la manière de les formuler.

Les deux composantes de la rationalité limitée que nous venons d'analyser, la nécessité de modéliser l'acquisition d'informations et la nécessité de prendre en compte les limites computationnelles de l'agent, amènent naturellement l'économie comportementale à penser le comportement des agents économiques comme un phénomène dynamique. L'optimisation de l'utilité, basée sur une conception substantielle de la rationalité, est en comparaison un modèle statique. Conséquemment, la rationalité limitée nous amène à penser le comportement de l'agent économique comme un comportement d'adaptation : *«A rational process in which the choice of a « best » is central we will call optimization; a rational*

¹⁴⁴ Simon, *Models of bounded rationality*. 1997. p. 296, je souligne.

¹⁴⁵ Simon, *Models of bounded rationality*. 1982, p. 455

*process in which movement toward a « better » is central we will call adaptation*¹⁴⁶.» Simon soutient que pour être un modèle du comportement économique, la rationalité substantielle doit postuler une plus grande complexité dans les mécanismes de choix et une plus grande capacité computationnelle de la part de l'agent. En effet, elle place toutes les conditions du choix dans l'environnement de l'agent – les préférences de l'agent étant une *donnée*, elles sont considérées comme faisant partie de l'environnement de l'agent – et la tâche d'optimisation est complètement déterminée par cet environnement. Au contraire, la rationalité limitée considère les capacités cognitives comme étant tout aussi déterminantes.

*«In neoclassical theory, behavior is shaped by the environment, and takes on whatever shape the environment demands for utility maximization. In the theory of bounded rationality, behaviour is shaped by interaction between the environment and the computational capabilities of the actor who is trying to adapt to that environment. If an account is to be given of behaviour, then neither environment nor computation can be ignored*¹⁴⁷.»

Pour conclure cette présentation des idées de Simon, envisageons deux pistes pour formaliser mathématiquement le choix dans un contexte de rationalité limitée. La recherche opérationnelle, par exemple la programmation linéaire, développe des outils qui ont pour but de mettre en pratique les objectifs d'optimisation de l'économie classique. Or, pour arriver à une solution optimale, ces outils mathématiques doivent simplifier la forme du problème. Par exemple, la fonction d'utilité reçoit une description formelle claire, une fonction mathématique dont la valeur est à maximiser ou à minimiser. Aussi, les contraintes servant à déterminer les solutions possibles sont précisées par des systèmes d'inégalités. Ainsi, ces outils proposent une méthode concrète pour s'attaquer au problème de décision qui émerge de la théorie économique. Cependant, en simplifiant les problèmes pour les rendre traitables par les outils de la recherche opérationnelle, on doit faire des approximations qui nous empêchent de trouver un optimum pour le problème original. Ce qui sera peut-être le cas, c'est que l'optimum du problème mathématique, approximation du problème réel, soit aussi une solution *satisfaisante* du problème réel. Dans un contexte de rationalité limitée, on peut trouver une solution satisfaisante en optimisant une approximation au problème.

¹⁴⁶ MBR2, p.219

¹⁴⁷ Simon, *Models of bounded rationality*. 1997, p. 325

L'autre piste de solution est de substituer l'adaptation à l'optimisation comme modèle de comportement rationnel. Il faudra alors modéliser directement les mécanismes de recherche d'informations et les procédures qui permettent d'arrêter la recherche de solution avant l'atteinte d'un optimum, en atteignant une solution satisfaisante. C'est ici que l'économie calculable entre en jeu. La thèse de Velupillai dans ce contexte serait que pour obtenir un modèle mathématique des comportements d'adaptation, les mathématiques algorithmiques sont de meilleurs outils que les mathématiques classiques. Ainsi, alors que les arguments négatifs de l'économie calculable ont pour but de démontrer que certains théorèmes de l'économie orthodoxe sont faux dans le contexte des mathématiques récursives, un argument positif de cette théorie serait de montrer que si l'on abandonne l'optimisation comme critère de comportement rationnel et qu'on la remplace par l'adaptation, les mathématiques récursives offrent des outils mieux adaptés pour formaliser la théorie économique.

Avec des idées de ce genre, on peut reconnaître chez Simon, un véritable précurseur de l'économie calculable. La prochaine section sera consacrée aux formalismes mis en place par Velupillai pour représenter la rationalité limitée. Après une présentation de ces formalismes, il sera possible d'évaluer si l'économie calculable atteint son but, c'est-à-dire si elle peut fournir une base logique à l'économie comportementale qui lui permettra de se développer en théorie économie mathématique.

2 – Formaliser l'adaptation : le volet positif de l'économie calculable.

L'objectif recherché dans la présentation de la théorie de Simon est double. D'une part, cela permet de comprendre les bases théoriques et historiques de l'économie calculable, rappelons cette citation de Velupillai :

«[...]I think a reader can see in what sense, and to what extent, computable economics, is an implementation of the great traditions of the behavioural economics

research programme Herbert Simon initiated and developed throughout his rich and varied intellectual life¹⁴⁸.»

D'autre part, cela permet aussi de définir comment l'économie calculable peut se poser en théorie économique à part entière. Elle se veut une formalisation mathématique d'une pensée économique incarnée avec le plus de clarté dans la théorie de l'économie comportementale de Simon. Cette formalisation sera présentée en trois étapes. D'abord, j'expliquerai pourquoi Velupillai considère que le concept de rationalité limitée est en fait plus général que le concept de rationalité optimisatrice. Ensuite, je présenterai le formalisme utilisé par l'économie calculable pour représenter l'information et la possibilité d'apprentissage. Enfin, je décrirai comment on peut assembler ces deux concepts pour donner une formalisation du comportement de l'agent économique comme un comportement dynamique d'adaptation.

2.1 – La rationalité limitée un concept général.

Une des considérations très importantes pour Velupillai est de réaffirmer la conviction que la rationalité limitée est un concept plus général que la rationalité optimisatrice. Le concept de rationalité limitée a reçu dans la littérature économique une interprétation sensiblement différente de celle que Simon lui avait donnée. La rationalité limitée en est venue, chez les économistes, à représenter une sorte de handicap. L'agent économique doit être *parfaitement* rationnel, or empiriquement, il ne se comporte pas selon les prescriptions du modèle théorique. Il faut donc formuler des *approximations* de rationalité qui permettent de décrire le comportement réel de l'agent. «*This problem, of course, confronts any attempt to lessen the rationality postulates traditionally used in economic theory. Usually, there is only one way to be fully rational, but there are many ways to be less rational¹⁴⁹.*» Velupillai est diamétralement opposé à cette vision de la situation. Pour lui, la rationalité de l'économie classique est réellement une approximation de la rationalité limitée, qui est celle de l'agent économique réel. «*But can we not go the other way? Can it not be the case that "full rationality" is the approximation to something more realistic in descriptive and predictive*

¹⁴⁸ Velupillai, *Computable foundations for economics* p.332

¹⁴⁹ Holland et Miller, «Artificial Adaptive Agents in Economic Theory». 1991, p. 367

*sense – indeed even in a normative sense*¹⁵⁰ ? » Pour montrer cette relation entre les deux types de rationalité, examinons une analogie de Velupillai qui met en jeu deux types de problèmes en mathématiques: les problèmes d'optimisation linéaire [OL] et les problèmes d'optimisation linéaire en nombres entiers [OLNE]. Rappelons d'abord quelles sont ces deux théories mathématiques. L'optimisation linéaire est une discipline mathématique qui s'intéresse aux techniques qui permettent de maximiser (ou de minimiser) la valeur d'une fonction linéaire en soumettant la valeur des variables de la fonction à un ensemble de contraintes linéaires énoncées sous la forme d'inégalités. Par exemple :

$$\begin{array}{l} \text{Maximiser } P(x, y) = x + y \\ \text{Avec les contraintes } \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y + 3x \leq 5 \end{array} \right. \end{array}$$

Dans un problème aussi simple, on peut rapidement trouver la solution par tâtonnement¹⁵¹. Or lorsque le nombre de variables et le nombre de contraintes augmentent, cela devient rapidement impossible et il faut avoir recours à des techniques plus sophistiquées. La plus connue est l'algorithme du simplexe. L'optimisation linéaire en nombres entiers, quant à elle, reprend le problème d'optimisation linéaire, mais exige en plus que les coefficients de la fonction à optimiser et des contraintes soient tous des nombres entiers. De même, dans un problème d'OLNE, on requiert que la solution donne aux variables des valeurs entières. Ces nouvelles exigences rendent les techniques, développées pour l'OL, inutilisables. Velupillai soutient que : « [...] *in terms of the classic difference between Integer Linear Programming and Linear Programming. [...] the former is unambiguously the more general and the more complex case; the latter is the less general simple case*¹⁵². » L'objectif de Velupillai est de montrer que le concept de rationalité limitée vient avec certaines considérations sur les capacités computationnelles de l'agent modélisé et sur la complexité computationnelle de la tâche exigée, considérations qui sont absentes du modèle de rationalité optimisatrice. Lorsqu'on prend en compte la discussion de l'économie calculable sur la nature des nombres

¹⁵⁰ Velupillai, *Computable Economics The Arne Ryde Memorial Lectures*. 2000, p. 45

¹⁵¹ Ici la solution est donnée par le couple $(x, y) = (0, 5)$

¹⁵² Velupillai, *Computable foundations for economics*. 2010, p. 364

réels et les limites récursives que l'on devrait respecter dans le développement des mathématiques, on peut interpréter l'analogie ainsi : l'OL, puisqu'elle fait un usage illimité des nombres réels et des mathématiques classiques, s'approche du modèle de rationalité optimisatrice en économie, en ce sens qu'elle postule une solution optimale sans analyser le contexte computationnel de sa découverte. Ainsi, la rationalité limitée est à rapprocher de l'OLNE, puisque toutes deux sont compatibles avec un cadre mathématique récursif où les contraintes liées à la calculabilité et à la complexité computationnelle sont naturellement exprimables.

Cette interprétation de l'analogie proposée par Velupillai permet effectivement de comprendre une différence entre la rationalité limitée et la rationalité optimisatrice, différence qui était au cœur des préoccupations d'Herbert Simon. La rationalité limitée incorpore un modèle de computation qui permet de décrire le fonctionnement des agents économiques. Par contre, elle réussit mal à montrer que la rationalité limitée est le modèle le plus général dont la rationalité optimisatrice est un cas particulier. Pour mieux comprendre cette relation, il faut comparer les concepts d'optimalité et de satisfaction. Pour que l'OL puisse obtenir des résultats intéressants, il est nécessaire de considérer les nombres qui entrent en jeu dans la formulation du problème et dans la solution au problème comme des nombres entiers. C'est donc en enrichissant la structure de l'ensemble des nombres admissibles que les résultats sont obtenus. De même, pour rendre possible le concept de maximisation de l'utilité, l'économie classique doit donner à son modèle mathématique, toute la richesse des nombres réels.

«[...] it can indiscriminately be assumed that the space of alternatives facing a consumer or a producer is compact. Such a space is endowed with a structure that brings with it certain properties, such as the possibility of contracting processes, that automatically obviates the need for an explicit consideration of decision rules. It also makes it unnecessary to consider the combinatorial complexities of the space generated by behaviour. The space is, ab initio, structured¹⁵³.»

Cette addition à la structure de l'espace de recherche (l'environnement de choix) réduit considérablement la tâche à réaliser. Cette simplification se fait au prix d'une hypothèse qui

¹⁵³ Ibid., p. 384

est, même théoriquement, déraisonnable¹⁵⁴. Ce même genre d'hypothèse se retrouve dans la formalisation des agents eux-mêmes. Dans le modèle orthodoxe, il est donné que les agents peuvent implémenter toutes fonctions continues d'un espace compact vers un autre, par exemple, pour garantir l'existence d'un point fixe. Ces hypothèses supplémentaires sur la nature de l'agent et de son environnement font en sorte que le questionnement sur les processus de décision est superflu. Ce sont donc en reconnaissant l'existence de ces hypothèses structurelles supplémentaires qu'on peut comprendre que la rationalité optimisatrice s'inscrit dans un cadre qui est un sous-ensemble de celui dans lequel s'inscrit la rationalité limitée. C'est dans le choix du critère de décision qu'on peut considérer l'optimisation comme un cas particulier.

«Finally, there is another theoretical reason why bounded rationality, satisficing and adaptation are tightly interlinked algorithmically and underpin the behaviour of decision making entities in general, and why there might be a case for the kind of observation made by Sidney Winter that orthodoxy is a special case of the world of Simon's Models. This is due to the fact that classical optimization is a special subset of what, in modern operations research, is called a decision problem. It is not difficult to recast the world of Simon's Models as decision problems¹⁵⁵.»

Si l'on caractérise les problèmes de décision auxquels font face d'une part, l'agent économique modélisé par la rationalité optimisatrice et la théorie économique orthodoxe, et d'autre part, l'agent économique modélisé par la rationalité limitée et la théorie de l'économie calculable, on peut obtenir quelque chose du genre :

Problème économique standard (PES) :

Minimiser $f(x)$

Avec les contraintes $\begin{cases} g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p \end{cases}$

C'est donc un problème d'optimisation mathématique (pas nécessairement linéaire cette fois).

¹⁵⁴ Le refus pour l'économie calculable d'utiliser tout l'appareil des nombres réel a été développé dans le premier chapitre.

¹⁵⁵ Velupillai, *Computable foundations for economics*. 2010, p.385

Problème économique standard version calculable (PES[†]) :

Étant donné : $\{F, c\}$

Où F est un ensemble d'alternative et c un critère de choix.

Trouver $f \in F$ t.q. $c(f) \leq c(g) \forall g \in F$

Avec les considérations supplémentaires suivantes : l'appartenance à l'ensemble F peut être décidée par une machine de Turing (F est récursif), la fonction c est une fonction calculable.

Pour Velupillai, ces descriptions des problèmes de décision caractérisent la différence entre la rationalité optimisatrice et la rationalité limitée :

«Definition 4.1. A boundedly rational agent solves decision problems in the sense of [PES[†]]

[...] This definition makes it clear, I hope, that boundedly rational agents are not approximately fully rational agents. They are boundedly rational, according to these definitions, because the nature of the problems they face, and the way they view solutions to them, places bounds on the classes of problems they can solve. The substantively rational – or “fully rational” – agent of standard formalisms is a special case because such an agent is confronted with a special subset of the class of decision problems facing the boundedly rational agent¹⁵⁶.»

La rationalité limitée, parce qu'elle postule une structure de l'environnement de choix qui est moins riche, est un modèle plus général que la rationalité optimisatrice qui doit, pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution à tous les problèmes de décision d'un agent économique, enrichir fortement la structure du problème.

2.2 – Formaliser le concept d'apprentissage.

¹⁵⁶Velupillai, *Computable Economics The Arne Ryde Memorial Lectures*, p. 63

Le point de départ de l'analyse que propose Velupillai du concept d'information est le constat suivant : les problèmes d'apprentissage que doivent comprendre les économistes, doivent être interprétés comme des problèmes liés à l'induction¹⁵⁷. Ce constat est bien mis en évidence par cette définition sommaire de l'apprentissage produite par Velupillai : *«In a nutshell, a scientific activity like learning is about finding rules to describe compactly the past evidence in such a way that predictions are implied in the compact rule»*¹⁵⁸. Apprendre, c'est donc découvrir, inductivement, une règle qui permet de synthétiser l'information. Velupillai établit formellement le lien entre l'information et l'apprentissage en présentant la théorie moderne de l'induction. À la base de cette théorie, on doit redéfinir le concept d'information. À la base de cette redéfinition du concept d'information dans le formalisme récursif de l'économie calculable se trouve une nouvelle approche du concept de hasard. Dans la théorie économique orthodoxe, la théorie de l'information est déduite de la théorie des probabilités; elle-même formalisée dans sa version subjective ou à partir de la théorie de la mesure¹⁵⁹. L'économie calculable, quant à elle, n'est pas vraiment compatible avec un tel traitement des probabilités qui s'appuie essentiellement sur l'analyse réelle. Par contre, la théorie de l'information peut recevoir une formalisation combinatoire permettant un traitement naturel dans le cadre de la théorie de la récursion. Un vaste domaine de recherche¹⁶⁰ dans la théorie de l'information veut abandonner ses fondements probabilistes pour offrir des bases combinatoires.

*«Basic information theory concepts must and can be founded without recourse to the probability theory, and in such a manner that « entropy » and « mutual information » concepts are applicable to individual values»*¹⁶¹.

*Information theory must precede probability theory, and not be based on it. By the very essence of this discipline, the foundations of information theory have a finite combinatorial character»*¹⁶².

¹⁵⁷ Ibid., p. 100

¹⁵⁸ Ibid., p. 79

¹⁵⁹ Cf. Velupillai, *Computability, complexity and constructivity in economic analysis*. 2005, p. 189

¹⁶⁰ Les travaux de Solomonoff, Chaitin, Kolmogorov et Martin-Löf fournissent une base théorique très forte à cette nouvelle approche.

¹⁶¹ Kolmogorov, «Logical Basis for Information Theory and Probability Theory». 1968, p. 668

¹⁶² Kolmogorov, «Combinatorial Foundations of information theory and the calculus of probabilities». 1983, p. 39

Le modèle orthodoxe de l'agent rationnel requiert un espace de probabilité sous-jacent à partir duquel l'information nécessaire à la définition de l'attente rationnelle et à la prise de décision peut être extraite. Un traitement combinatoire de l'information change la perspective, il permet un traitement algorithmique, et est compatible avec les préoccupations de l'économie calculable qui veut remplacer l'optimisation par la décidabilité. À partir de cette formalisation du concept d'information, le phénomène de l'apprentissage peut recevoir un traitement mathématique. La possibilité d'extraire un *pattern* d'une séquence représentera l'apprentissage d'une information nouvelle.

En se basant sur cette nouvelle manière de concevoir formellement l'information, Velupillai présente le formalisme de Solomonoff pour décrire la théorie moderne de l'induction. À l'aide de ce formalisme, on peut concevoir l'apprentissage comme la découverte inductive d'une règle de décision. Dans ce contexte, une règle de décision est identifiée à la possibilité de reconnaître un langage formel, c'est-à-dire un ensemble de séquences de symboles. Faire un choix sur une séquence de symboles donnés en déterminant si elle appartient ou non à l'ensemble spécifié par un langage, est un exemple d'application d'une règle de décision ainsi pensée. Une interprétation économique de cet apprentissage pourrait être, par exemple, d'associer à la règle de décision recherchée, un équilibre devant être prévu par un agent économique dans le modèle d'anticipation rationnelle. Apprendre l'équilibre revient donc, dans ce formalisme, à découvrir inductivement une séquence de fonctions calculables permettant d'identifier de mieux en mieux le langage formel correspondant au problème économique. Trois résultats de l'analyse formelle sont proposés par Velupillai¹⁶³ :

«Proposition 5.1 : Identification by enumeration is a computable approximation to the inductive inference formula given by (5.8). An immediate consequence is a learnable class of functions.

Proposition 5.2: Functions in the class of primitive recursive functions (PRC) can be learned.

¹⁶³ Il ne serait pas utile de reproduire ici les détails techniques menant à ces résultats. On peut les trouver dans les chapitre 5 de Velupillai, *Computable Economics The Arne Ryde Memorial Lectures* .

Proposition 5.3: The set of total recursive functions cannot, in general, be learned¹⁶⁴.»

On voit donc qu'il y a tout de suite des limites à la nature des règles de décision qui pourront être apprises dans ce formalisme. En particulier, ces règles de décision doivent être implémentées par des fonctions primitives récursives.

Pour donner une interprétation plus économique de ces résultats formels, Velupillai se base sur la démarche élaborée par Spear dans son article : *Learning Rational Expectations Under Computability Constraints*¹⁶⁵. Dans cet article, Spear veut modéliser l'apprentissage, inductif, de l'équilibre dans une théorie des anticipations rationnelles. Pour ce faire, il remplace l'étude topologique de la structure de l'espace des prix par l'étude récursive de l'espace des prix. Plutôt que de vérifier des conditions topologiques qui garantissent l'existence d'un point fixe (l'équilibre économique), Spear veut vérifier la calculabilité de fonctions qui sont des approximations inductives de ce point fixe. Les conclusions de Spear ne sont pas surprenantes pour les adeptes de l'économie calculable : les agents peuvent apprendre l'équilibre par induction s'ils ont une information complète, alors que si l'on abandonne l'hypothèse d'information complète, les agents ne peuvent pas apprendre l'équilibre par induction. Velupillai décortique deux conséquences supplémentaires de la démarche de Spear :

«Remark. The theorem, although effective in the technical recursion-theoretic sense at every stage of the argument as far as implementation is concerned, does embody an unfortunate epistemological consequence : there is no effective way for the agent to know when to stop applying the learning mechanism.

Remark. Nothing in my discussion guarantees any of the functions to be tractably computable. Indeed, once again, it is most likely that none of these assumptions guarantees polynomial-time computability of any of the constituent functions¹⁶⁶.»

Ces deux remarques de Velupillai sont annonciatrices de perspectives plutôt pessimistes pour la mise en pratique des procédures développées par Spear pour inclure la théorie moderne de l'induction dans un cadre récursif. Velupillai insiste cependant pour faire valoir la pertinence de développer ce programme. Selon lui, la recherche dans le domaine devrait se concentrer

¹⁶⁴ Ibid.. 2000, p. 86

¹⁶⁵ Spear, «Learning Rational Expectations Under Computability Constraints». 1989

¹⁶⁶ Velupillai, *Computable Economics The Arne Ryde Memorial Lectures*. 2000, p. 99

sur l'évaluation de la complexité computationnelle des tâches reliées à l'apprentissage ainsi modélisé. Sachant que ces tâches sont algorithmiquement complexes, on peut tout de même caractériser cette complexité plus finement.

2.3 – L'adaptation le propre des systèmes universaux.

Simon décrivait le comportement d'un agent *pleinement rationnel* comme un comportement de choix statique, qu'il opposait au comportement dynamique d'adaptation de l'agent *raisonnablement rationnel*. Dans son approche du concept d'adaptation, Velupillai prend une direction légèrement différente. Premièrement, s'appuyant sur des positions de l'économiste Robert Lucas, il soutient que tout comportement économique est directement ou indirectement adaptatif :

«In general terms, we view or model an individual as a collection of decision rules (rules that dictate the action to be taken in given situations) and a set of preferences used to evaluate the outcomes arising from particular situation-action combinations. These decision rules are continuously under review and revision; new decision rules are tried and tested against experience, and rules that produce desirable outcomes supplant those that do not. I use the term "adaptive" to refer to this trial-and-error process through which our modes of behavior are determined¹⁶⁷.

Technically, I think of economics as studying decision rules that are steady states of some adaptive process, decision rules that are found to work over a range of situations and hence are no longer revised appreciably as more experience accumulates.

From this point of view, the question whether people are in general "rational" or "adaptive" does not seem to me worth arguing over¹⁶⁸.»

Par ailleurs, Velupillai interprète le processus d'essai-erreur décrit par Lucas comme étant une explicitation du caractère dynamique de tout comportement économique. C'est donc en modélisant algorithmiquement les processus dynamiques entrant en jeu dans la compréhension du comportement rationnel que Velupillai veut comprendre l'adaptation

¹⁶⁷ Lucas, «Adaptive Behavior and Economic Theory». 1986, p. S401

¹⁶⁸ Ibid., p. S402; je souligne.

propre à ce comportement. Les hypothèses nécessaires à cette formalisation algorithmique présentées par Velupillai sont les suivantes :

- (a) *«Adaptive process will be assumed to be dynamical systems (in the strict technical sense of the term.*
- (b) *Dynamical systems capable of computational universality can be constructed from Turing machine.*
- (c) *Rational behaviour by an economic agent is equivalent to the computational behaviour of a Turing machine¹⁶⁹.*»

La formalisation de Velupillai se fera donc à partir de systèmes dynamiques représentés par des machines de Turing. En exploitant ce formalisme, Velupillai réussit à démontrer plusieurs résultats significatifs. Premièrement, seuls les systèmes dynamiques capables d'universalité¹⁷⁰ sont compatibles avec la définition classique de la rationalité. Deuxièmement, aucune trajectoire d'un système dynamique universel ne peut être reliée à un problème de maximisation.

«What do these theorems mean? They give formal content, in the first place, to Samuelson's characteristically perceptive intuition about the existence of important economic dynamics that cannot be related to maximum principles. More significantly, they suggest that rational behaviour is – or has to be – essentially, adaptive or procedural. (...) But they also suggest that, embedded within the standard rationality postulates of economic theory, there are procedural elements that have been suppressed by confining analysis to equilibrium outcomes and not to the path that may or may not lead to such equilibria – quite independent of whether they exist or not¹⁷¹»

On a ici encore une impression de vide. Alors que les systèmes dynamiques peuvent représenter l'agent rationnel classique, ils sont incapables d'implémenter le comportement qu'on attend de lui. Par contre, cette vision est celle qu'on obtient si l'on se limite aux prescriptions de Lucas qui nous dit : *I think of economics as studying decision rules that are steady states of some adaptive process*. Qu'en est-il des autres trajectoires possibles pour les systèmes dynamiques utilisés pour modéliser l'adaptation? Si on ouvre l'analyse aux trajectoires instables – celles représentées par des attracteurs par exemple –, on peut

¹⁶⁹ Velupillai, *Computable Economics The Arne Ryde Memorial Lectures*. 2000, p. 47

¹⁷⁰ Un système dynamique est capable d'universalité s'il peut simuler, en spécifiant correctement ses conditions initiales, la trajectoire de n'importe quel système dynamique.

¹⁷¹ Velupillai, *Computable foundations for economics*. 2010, p. 342

représenter des phénomènes qui ont traditionnellement échappé à l'attention des économistes : *«As a result notions that have traditionally been given an 'underworld' status – instability, disequilibria and nonprobabilistic inference – are viewed in a positive light¹⁷².»* Les résultats formels de l'économie calculable dans l'étude du comportement adaptatif sont donc pour l'instant des résultats négatifs. La formalisation en termes de systèmes dynamiques et de mathématiques algorithmiques amène Velupillai à associer le comportement de l'agent économique à trois problèmes différents que l'on sait indécidables¹⁷³. Il en conclut, encore une fois, que bien qu'il n'y ait pas de solution générale au problème, on peut découvrir certaines classes de sous-problèmes pour lesquelles des procédures uniformes existent. Il identifie cette propriété à la nature des agents économiques selon Lucas : *an individual as a collection of decision rules*. Selon Velupillai, cette recherche de procédures uniformes pour certains sous-problèmes, de même que la classification de ces classes de sous-problèmes est typique d'une démarche d'essai-erreur qui fait donc du comportement rationnel, un comportement adaptatif.

3 – Conclusion

«The message I wish to convey, however, is reasonably simple. The computable approach to economics enables the economic theorist to work within a consistent analytical framework in studying choice, learning from evidence, adapting to events, and exercising a broad concept of rationality, while going about the ordinary business of living as an economic person¹⁷⁴.»

Voilà donc, exposées clairement, les prétentions de Velupillai.

L'analyse des résultats obtenus par l'économie calculable nous a permis de constater : premièrement, que la rationalité limitée est un cadre théorie plus général que la rationalité optimisatrice, qu'elle permet donc une modélisation plus inclusive des comportements économiques; deuxièmement, que l'on peut définir théoriquement le concept d'information à l'aide d'une approche combinatoire et, ce faisant, que l'on peut modéliser l'apprentissage

¹⁷² Ibid., p. 333

¹⁷³ Cf. Velupillai, *Computable Economics The Arne Ryde Memorial Lectures*. 2000, p. 60

¹⁷⁴ Ibid., p. 88

comme une opération inductive plutôt que déductive; troisièmement, que les comportements économiques devraient être interprétés comme des comportements adaptatifs. Ces résultats peuvent-ils nous convaincre que l'économie calculable est une formalisation des théories économiques de Simon?

Lorsque l'on veut analyser la complexité computationnelle des tâches que doivent effectuer les agents économiques (consommateur, producteur, firme, institution...), on doit choisir le point de départ de l'analyse. Est-ce que l'objectif est de donner une borne maximale à la complexité théorique? Dans ce cas, l'analyse du premier chapitre nous montre que les machines de Turing, qui représentent le plus puissant paradigme de calcul, peuvent *représenter* le comportement économique attendu par l'économie orthodoxe, mais ne peuvent pas le réaliser. Par ailleurs, cette limite théorique de complexité computationnelle est encore très loin des capacités des êtres humains, qui sont des agents économiques réels. Dans une lettre¹⁷⁵ qu'il écrit à Velupillai après la lecture de *Computable Economics*, Simon entretient un propos très éclairant sur le double rôle de cette analyse en termes de complexité computationnelle. Il propose alors trois sous-problèmes à explorer. Le premier est la limite théorique déjà évoquée. Le second est de comprendre plus finement la complexité computationnelle que l'on peut espérer atteindre avec les machines de calcul réelles (les ordinateurs et les algorithmes actuellement utilisés). Dans ce domaine de recherche, on quitte le monde abstrait des machines de Turing qui disposent d'espace mémoire et de temps de travail illimités, pour analyser le temps de calcul requis par les ordinateurs réels pour résoudre des problèmes concrets. Le troisième sous-problème est celui de comprendre le comportement de décision des êtres humains; quelles sont les stratégies qui permettent aux êtres humains de prendre des décisions et de le faire dans un temps raisonnable? Les travaux de Simon sont résolument tournés vers le comportement empirique des agents réels. Les travaux de l'économie calculable eux, sont surtout consacrés à délimiter la *frontière extérieure* de la complexité théorique.

Pour sa part, Velupillai semble parfois abusivement enthousiaste face à la portée de son projet :

¹⁷⁵ Velupillai, *Computable foundations for economics*. 2010, p. 409

«It was only after a first draft of this essay was completed that it became clear to me that I could frame almost all of Simon's models within one single, simple, mathematical framework: The Turing Machine Model. This realization, in turn, came about quite naturally when it became clear to me that the Models of Behaviour, Discovery and Hierarchies, in Simon's works, were underpinned by the concepts of bounded rationality, satisficing, adapting, induction, abduction, (near)-decomposability, simplicity and dynamics. Every one of these concepts were given algorithmic and, hence experimentally implementable numerical content. It was, therefore, natural that I try to study and unify the Models of Simon within the framework of a Turing Machine Model¹⁷⁶.»

Rappelons que cette approche qui consiste à reformuler, à l'aide des machines de Turing, tous les concepts pertinents à l'analyse économique a abouti à de nombreux résultats importants. Cependant, tous ces résultats sont pour l'instant des résultats négatifs sur l'impossibilité des théorèmes phares de l'économie classique ou sur les limites potentielles de l'analyse mathématique.

«Economies, obviously, are evolving, complex, adaptive dynamic systems. Yet to people who come from ecology or brain research or computer science or other fields in which one deals with evolving complex dynamic systems, mainstream economics seems committed to an alien and unpromising methodology. Computable Economics attempts to reorient economics in a direction that will bring it closer to these other fields in basic outlook and will enable us to learn from the exciting new methods of investigation that have been developed in these areas¹⁷⁷.»

Si les motivations et les principes qui jalonnent les deux approches, celle de Simon et celle de Velupillai, sont les mêmes, il manque encore un penchant expérimental à l'économie calculable pour qu'elle soit réellement une théorie économique mathématique de la rationalité limitée.

¹⁷⁶ Ibid., p.373

¹⁷⁷ Leijonhufvud, «Adaptive Behavior, Market Processes and the Computable Approach». 1995, p. 1497

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif de ce mémoire était de présenter et d'analyser les résultats de l'économie calculable. Dans un premier temps, la reformulation du concept de rationalité économique dans un cadre récursif nous a permis de démontrer que l'agent rationnel était compatible avec le fonctionnement d'une machine de Turing. Par ailleurs, le résultat le plus important obtenu est que la tâche de rationaliser une fonction de choix est computationnellement trop difficile pour ce modèle de calcul, qui est le modèle théorique le plus puissant. En effet, l'ensemble des fonctions de choix qui sont rationnelles est un ensemble indécidable. L'analyse à l'aide de la théorie de la calculabilité nous a donc montré que les exigences computationnelles implicites dans la définition classique de la rationalité économique sont impossibles à satisfaire pour un agent humain. Ce faisant, cette analyse en termes de calculabilité a pu caractériser plus finement la complexité computationnelle de la rationalité économique : la tâche de choix attribuée à un agent économique rationnel est strictement plus complexe que le 10^e problème de Hilbert.

Dans un second temps de l'analyse, c'est la théorie des jeux qui a été reformulée dans le formalisme de la récursion. En développant le résultat original de Rabin, Velupillai étend l'analyse de l'économie calculable à l'ensemble des jeux arithmétiques, une vaste famille de jeu qui a des interprétations importantes en économie théorique. Tous ces jeux sont, d'un point de vue classique, des jeux déterminés. Ainsi on sait, a priori, qu'il existe pour chacun de ces jeux une stratégie gagnante. Or, lorsque vient le temps d'explicitier cette stratégie dans un langage mathématique permettant de la décrire sous la forme d'un algorithme, on rencontre un grave problème. On a vu que, étant donné un jeu arithmétique, trouver une

stratégie gagnante pour ce jeu est un problème indécidable. Encore une fois, on peut tenter de tirer leçon de ce résultat négatif. Ce genre de problème est essentiellement lié au formalisme utilisé pour développer quelques intuitions originales sur le déroulement d'un jeu en théorèmes généraux. En formalisant le problème, on a peine à éviter que le formalisme s'emballe et génère une quantité d'informations qui rend l'exploration de l'espace des solutions théoriquement impossible. La possibilité de prendre la mesure de cette explosion formelle est une différence majeure entre les deux formalismes utilisés : les mathématiques classiques et les mathématiques récursives. Les mathématiques récursives peuvent mettre en évidence la complexité des tâches de résolution de problèmes associés aux problèmes de l'économie.

Dans un troisième temps, le programme positif de fonder une théorie économique mathématique algorithmiquement à partir des idées d'Herbert Simon a été décortiqué. On a vu que les principaux concepts de la théorie de Simon peuvent recevoir une formalisation algorithmique. La première conclusion de cette analyse est que cette formalisation montre que la rationalité optimisatrice est un concept moins général que celui de rationalité limitée. Pour étudier le comportement des agents économiques, il est donc souhaitable de favoriser le second concept. En formalisant l'apprentissage par la théorie de l'induction, certaines limites sont apparues sur la possibilité d'apprendre par induction une règle de décision. Ceci n'est pas possible, en général, si la règle de décision est une fonction partielle récursive. Par contre, l'apprentissage par induction est toujours possible dans le cas des fonctions récursives primitives. On a donc obtenu un critère sous forme de deux cas limites pour savoir si l'apprentissage par induction est faisable. Finalement, lorsqu'on pose que le comportement de l'agent économique doit être compris comme un comportement dynamique d'adaptation, on peut distinguer les systèmes dynamiques qui sont capables de *représenter* le comportement attendu de l'agent économique. Ces systèmes doivent être capables d'universalité, c'est-à-dire être associés à des machines de Turing universelles. On a découvert que ces systèmes étaient incapables de *réaliser* un comportement d'optimisation, mais qu'ils ouvraient la voie à l'étude de comportements ignorés dans le formalisme classique : des situations de déséquilibre ou d'instabilité.

Je suis d'avis que l'économie calculable a fait la preuve de son utilité. Premièrement, elle démontre que plusieurs résultats importants de l'économie classique, servant pour la plupart de pierre d'assise à la théorie, sont faux si l'on prend en compte les impératifs liés à la calculabilité et à la complexité algorithmique. Ce faisant, elle permet d'établir dans une théorie mathématique formelle ce que beaucoup de critiques ont soutenu en se basant sur des arguments méthodologiques ou sur des faits empiriques. Deuxièmement, ses fondements algorithmiques imposent des outils techniques forts différents de ceux utilisés par l'économie classique. Ces outils offrent des possibilités d'analyse sur la faisabilité théorique des concepts de l'économie. Cette analyse pose des limites qui sont des bornes que l'on ne saurait raisonnablement franchir.

La communauté des économistes pourra-t-elle développer une théorie économique positive basée sur les idées et les outils de l'économie calculable? Outre les défis stratégiques liés à la pénétration du milieu académique par les idées de l'économie calculable qui seront sans doute énormes, quelques constats s'imposent. Maintenant que l'économie calculable a démontré l'efficacité de son formalisme pour repérer les impasses de la théorie classique, elle ne doit pas négliger les mises en garde d'économistes comme Herbert Simon qui insistent sur l'importance d'avoir des bases empiriques solides pour formuler des théories économiques. Elle doit aussi développer plus que des pistes de résultats positifs. Les résultats négatifs sont importants en eux-mêmes, mais ils ne permettront de convaincre les économistes d'adhérer à cette nouvelle approche que si des exemples d'utilisation positive de la théorie les accompagnent.

BIBLIOGRAPHIE

- Arrow, Kenneth J. 1959. «Rational Choice Functions and Orderings». *Economica*, vol. 26, no 102, p. 121-127. En ligne. <<http://www.jstor.org/stable/2550390>>.
- Bloch, Francis. 2002. «Nash, John «The Bargaining Problem»». In *Dictionnaire des grandes oeuvres économiques*, Greffe Xavier, Lallement Jérôme et de Vroey Michel. Paris: Dalloz.
- da Costa, Newton C. A., et Francisco A. Doria. 2005. «Computing the future». In *Computability, Complexity and Constructivity in Economic Analysis* Kumaraswamy Vela Velupillai, p. 15-50. Malden: Blackwell Publishing.
- Davis, M. 1953. «Arithmetical problems and recursively enumerable predicates». *The Journal of symbolic logic*, vol. 18, no 1, p: 33-41.
- Davis, M., H. Putnam et J. Robinson. 1961. «The decision problem for exponential diophantine equations». *The Annals of Mathematics*, vol. 74, no 3, p. 425-436.
- Debreu, Gérard. 1984. *Théorie de la valeur*, 2e édition. Paris: Dunod
- Elster, Jon. 1989. *Nuts and bolts for the social sciences*. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 184 p.
- Eves, Howard. 1990. *An Introduction to the History of Mathematics*, 6e édition. Coll. «The Saunders Series». Philadelphie: Saunders College Publishing, 775 p.
- Gale, David, et F. M. Stewart. 1953. «Infinite games of perfect information». In *Contributions to the Theory of Games*, Kenneth Joseph Arrow et Harold William Kuhn, Princeton : Princeton University Press.
- Gigerenzer, Gerd. 1997. «Bounded rationality models of fast and frugal inference». *Swiss Journal of Economics and Statistics*, vol. 133, no 2, p. 201-218.

- Gould, Julius, et William L. Kolb. 1964. *A dictionary of the social sciences*. New York: Free Press of Glencoe, 761 p.
- Hausman, Daniel M. 1992. *The Inexact and Separate Science of Economics*. Cambridge: Cambridge University Press, 372 p.
- Hilbert, David. 1990. *Sur les problèmes futurs des mathématiques les 23 problèmes*: Sceaux: J. Gabay, 57 p.
- Holland, John H., et John H. Miller. 1991. «Artificial Adaptive Agents in Economic Theory». *The American Economic Review*, vol. 81, no 2, p. 365-370. En ligne.
<<http://www.jstor.org/stable/2006886>>.
- Jeffrey, Richard, C. 1965. *The logic of decision*. New York: McGraw-Hill, 201 p.
- Jones, James P. 1978. «Three Universal Representations of Recursively Enumerable Sets». *The Journal of symbolic logic*, vol. 43, no 2, p. 335-351. En ligne.
<<http://www.jstor.org/stable/2272832>>.
- Kolmogorov, Andrei M. 1968. «Logical Basis for Information Theory and Probability Theory». *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 14, no 5, p. 662-664.
- , 1983. «Combinatorial Foundations of information theory and the calculus of probabilities». *Russian Mathematical Survey*, vol. 38, no 4, p. 29-40.
- Kramer, Gerald H. 1967. «An Impossibility Result Concerning the Theory of Decision-Making». In *Mathematical Applications in Political Science, Vol.III*. J.L. Bernd, p. 39-51: University Press of Virginia. En ligne.
<<http://cowles.econ.yale.edu/P/cp/p02b/p0274.pdf>>.
- Kuhn, H. W., et A. W. Tucker. 1958. «John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics». *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 64, no 1958, p. 100-122.
- Lazarsfeld, Paul Felix. 1955. *Mathematical thinking in the social sciences*. Glencoe, Ill.: Free Press, 444 p.

- Leijonhufvud, Axel. 1995. «Adaptive Behavior, Market Processes and the Computable Approach». *Revue Économique*, vol. 46, no 6, p. 1497-1510. En ligne. <<http://www.jstor.org/stable/3502459>>.
- Lewis, Alain. 1985. «On Effectively Computable Realizations of choice Functions». *Mathematical Social Sciences*, vol. 10, p. 43-80.
- , 1988. «Lower bounds on degrees of game-theoretic structures». *Mathematical Social Sciences*, vol. 16, no 1, p. 1-39. En ligne. <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0165489688900029>>.
- , 1992. «Some aspects of effectively constructive mathematics that are relevant to the foundations of neoclassical mathematical economics and the theory of games». *Mathematical Social Sciences*, vol. 24, p. 209-235.
- Lucas, Robert E., Jr. 1986. «Adaptive Behavior and Economic Theory». *The Journal of Business*, vol. 59, no 4, p. S401-S426. En ligne. <<http://www.jstor.org/stable/2352771>>.
- Matiasevich, Iu V. 1995. *Le dixième problème de Hilbert : son indécidabilité*. Paris: Masson, 328 p.
- Nash, John F. 1950a. «Equilibrium Points in n-Person Games». *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 36, no 1, p. 48-49. En ligne. <<http://www.jstor.org/stable/88031>>.
- Nash, John F., Jr. 1950b. «The Bargaining Problem». *Econometrica*, vol. 18, no 2, p. 155-162. En ligne. <<http://www.jstor.org/stable/1907266>>.
- Neumann, John von, et Oskar Morgenstern. 2004. *Theory of Games and Economic Behavior*, édition du 60e anniversaire. Princeton : Princeton University Press, 776 p.
- Osborne, Martin J., et Ariel Rubinstein. 1994. *A Course in Game Theory*. Cambridge: The MIT Press, 352 p.
- Post, Emil L. 1944. «Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems». *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, vol. 50, no 5, p. 284-316. En ligne.

<http://projecteuclid.org.proxy.bibliotheques.uqam.ca:2048/euclid.bams/1183505800>
 \geq .

Putnam, Hilary. 1960. «An unsolvable problem in number theory». *The Journal of symbolic logic*, vol. 25, no 3, p. 220-232.

Rabin, M. O. 1957. «Effective Computability of Winning Strategies». In *Contributions to the theory of games, Volume III*, Dresner M. et al., p. 147-157. Princeton: Princeton University Press.

Ramsey, Frank. 2003. *Logique Philosophie et Probabilités*. Paris: Vrin, 343 p.

Robinson, J. 1952. «Existential definability in arithmetic». *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 72, no 3, p. 437-449.

Rosenberg, Alexander. 1992. *Economics - Mathematical Politics or Science of Diminishing Returns?* Coll. «Science and Its Conceptual Foundations». Chicago: The University of Chicago Press, XVII, 266 p.

Ross, Sheldon M. 2002. *Initiation aux probabilités* par Christian Hofer et Dorsaz Frédéric, traduction française de la 4e édition. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, 458 p.

Sahlin, Nils-Eric. 2001. «Frank Ramsey (1903-1930)». En ligne.
<http://www.nilsericsahlin.se/ramsey/index.asp>.

Simon, Herbert A. 1978. «Rationality as Process and as Product of Thought». *The American Economic Review*, vol. 68, no 2, p. 1-16. En ligne.
<http://www.jstor.org/stable/1816653>.

-----, 1982. *Models of bounded rationality*, no 2. Cambridge, Mass.: MIT Press, 505 p.

-----, 1997. *Models of bounded rationality*, no 3. Cambridge, Mass.: MIT Press, 457 p.

Sofronidis, N. E. 2004. «Undecidability of the Existence of Pure Nash Equilibria». *Economic Theory*, vol. 23, no 2, p. 423-428. En ligne. <http://www.jstor.org/stable/25055760>.

- Spear, Stephen E. 1989. «Learning Rational Expectations Under Computability Constraints». *Econometrica*, vol. 57, no 4, p. 889-910. En ligne.
<<http://www.jstor.org/stable/1913776>>.
- Tsuji, Marcelo, Newton C. A. da Costa et Francisco A. Doria. 1998. «The Incompleteness of Theories of Games». *Journal of Philosophical Logic*, vol. 27, no 6, p. 553-568. En ligne.
<<http://www.springerlink.com.proxy.bibliotheques.uqam.ca:2048/content/h64h7w6211305833/abstract/>>.
- Velupillai, Kumaraswamy. 2000. *Computable Economics The Arne Ryde Memorial Lectures*. Oxford: Oxford University Press, 222 p.
- , 2003. *Essays on computable economics, methodology and the philosophy of science*. Coll. «Trento university, department of economics discussion paper», no 8. Trento, 144 p.
- , 2005. *Computability, complexity and constructivity in economic analysis*. Oxford: Blackwell p.
- , 2010. *Computable foundations for economics*. London; New York: Routledge, 488 p.